

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

4. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

Abgabe: Mi. 21.11.2018 12:00, in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + \omega y - K[x(t) - x(t - \tau)], \\ \dot{y} &= -\omega x + \lambda y - K[y(t) - y(t - \tau)],\end{aligned}$$

mit $\lambda > 0, \omega > 0$ numerisch gelöst werden. Sie beschreibt einen instabilen Fokus mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

$$\dot{X} = f[X(t), X(t - \tau)]$$

ist gegeben durch

$$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n, X_{n-\Delta}],$$

wobei $\Delta = \tau/dt$.

- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind, fangen Sie von vorne an).
Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation `%`.
- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.
- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Output-Arrays und plotten Sie dann die Phasenportraits (inklusive der Transiente).

Bitte Rückseite beachten! →

4. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Logistisches Populationsmodell mit Delay*

Betrachten Sie das folgende Modell für die Anzahl N an Individuen in einer Population

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t - \tau)/K],$$

wobei r die Wachstumsrate und K ein Maß für die Tragfähigkeit der Umwelt ist. Das Modell kann auf die dimensionslose Gleichung

$$x'(s) = x(s)[1 - x(s - a)]$$

überführt werden. Betrachten Sie im Folgenden nur noch die dimensionslose Gleichung.

1. Die Fixpunkte liegen offensichtlich bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie, dass x_0 stets instabil ist und x_1 für $a = 0$ stabil ist.
2. Finden Sie den Wert $a > 0$, bei dem x_1 die Stabilität in einer Hopf-Bifurkation verliert.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im EW 202.• Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
Übung:	<ul style="list-style-type: none">• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, kathy.luedge@tu-berlin.de, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00.• Felix Köster, EW 629, 314-24254, f.koester@tu-berlin.de, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30