

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

7. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

Abgabe: Mi. 12.12.2018 12:00, in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 13 (10 Punkte): Maxwell-Bloch-Gleichungen

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \kappa(P - E), \\ \dot{P} &= \gamma_1(ED - P), \\ \dot{D} &= \gamma_2(J + 1 - D - EP).\end{aligned}$$

Hierbei ist E das elektrische Feld der Lasermode, P die mittlere Polarisierung im Medium und D die Besetzungsinversion. Der Parameter $\kappa > 0$ ist die Photon-Verlustrate und $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ sind die Zerfallsraten der Polarisierung bzw. der Inversion. Der Parameter J stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein.

Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen.
2. Charakterisieren Sie den Fixpunkt der "Aus"-Lösung (bei der das E-Feld verschwindet) bezüglich seiner Stabilität und Art (Sattel/Knoten/Fokus).
3. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$. Damit lassen sich dann P und D adiabatisch wie folgt eliminieren. Nehmen Sie $\dot{P} \approx 0$ und $\dot{D} \approx 0$ an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für E her.
4. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte E^* und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit E^* in Abhängigkeit von J .

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 14 (10 Punkte): Maxwell-Bloch-Gleichungen und Lorenz-System

Die in der vorherigen Aufgabe eingeführten Maxwell-Bloch-Gleichungen (1) lassen sich in das Lorenzsystem (2) überführen. Die Gleichungssysteme lauten:

$$\dot{E} = \kappa(P - E), \quad (1a) \quad x' = -\sigma x + \sigma y \quad (2a)$$

$$\dot{P} = \gamma_1(E D - P), \quad (1b) \quad y' = \rho x - y - xz \quad (2b)$$

$$\dot{D} = \gamma_2(J + 1 - D - EP). \quad (1c) \quad z' = xy - \beta z, \quad (2c)$$

1. Transformieren Sie die Maxwell-Bloch-Gleichungen in die Lorenz-Gleichungen. Führen sie dazu neue Variablen ein:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &:= aE & \tilde{P} &:= bP \\ \tilde{D} &:= c(D + d) & s &:= \frac{t}{t_c} \end{aligned}$$

Hier beschreibt s eine reskalierten Zeit. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d, t_c \in \mathbb{R}$, sowie σ, ρ und β so, dass sie die Gleichungen (2) erhalten. Identifizieren Sie dazu die neuen Größen $\tilde{E}, \tilde{P}, \tilde{D}$ mit x, y, z .

2. In Experimenten beobachtet man bei manchen Lasern eine sogenannte zweite Laserschwelle. Ab einer bestimmten Pumpstärke fängt der Laser dabei selbständig an zu oszillieren. Finden Sie die zweite Laserschwelle ρ_{2th} , indem Sie die Lorenzgleichungen auf Hopf-Bifurkationen hin untersuchen.

Stellen Sie dazu die Eigenwertgleichung der Jacobimatrix im lasenden Fixpunkt auf. Machen Sie dann den Ansatz

$$\lambda = \pm i\omega \quad (3)$$

und lösen Sie die charakteristische Gleichung nach ρ auf.

Hinweis: In den Lorenzgleichungen übernimmt ρ die Rolle der Pumpstärke. Gleichung (3) ist die notwendige Bedingung für eine Hopf-Bifurkation. Betrachten Sie Real- und Imaginärteil der charakteristischen Gleichung getrennt voneinander.

| | |
|------------------|--|
| Vorlesung: | <ul style="list-style-type: none"> • Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. |
| Übung: | <ul style="list-style-type: none"> • Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731. |
| Webseiten: | <ul style="list-style-type: none"> • Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/ |
| Scheinkriterien: | <ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung. |
| Kontakte: | <ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, kathy.luedge@tu-berlin.de, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00. • Felix Köster, EW 629, 314-24254, f.koester@tu-berlin.de, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30 |