Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

8. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

Abgabe: Mi. 19.12.2018 12:00, in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Kolmogorow-Sinai-Entropie und fraktale Dimension*

Die Kolmogorow-Sinai-Entropie ist ein Maß für die Informationszunahme eines dynamischen Systems und gibt Rückschlüsse über die Dimension des Attraktors. Dafür legt man eine Kugel mit Radius l um jeden Punkt der Trajektorie im Phasenraum und berechnet, wie viele Punkte innerhalb dieser Kugel liegen. Dies gibt einem die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Punkt der Trajektorie wieder mindestens in einer Umgebung der Größe l um die Trajektorie liegt. Diese Wahrscheinlichkeit kann mit (1) und basierend darauf die Korrelationsdimension D_2 mit (2) berechnet berechnen, wobei $\vec{x}_i$ und $\vec{x}_j$ die Koordinaten zweier Punkte der Trajektorie im Phasenraum sind und Θ die Heaviside-Funktion. Dies gibt gleichzeitig auch direkt die untere Grenze für die Hausdorff-Dimension.

$$\sum_i P_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Theta(l - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (1a) \qquad\qquad D_2 = \lim_{l\to 0}\frac{\ln\sum_i P_i}{\ln l}, \quad (2a)$$

Das vom letzten Zettel bekannte Lorenz-System soll hierfür untersucht werden, welches durch folgende dynamische Gleichungen gegeben war.

$$\begin{aligned} x' &= -\sigma x + \sigma y \\ y' &= \rho x - y - xz \\ z' &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

1. Simulieren Sie das Lorenz-System für $\sigma = 10$, $\rho = 28$ und $\beta = \frac{8}{3}$. Lassen sie das System dafür eine Zeit einschwingen, um die Transiente abzuschneiden. Simulieren Sie dann das System weiter und berechnen Sie $D_2 = 2.05$. Eine Schrittweite von $dt = 0.01$ und eine Anzahl von $N = 20000$ Zeitpunkten sollte ausreichen. Wählen Sie l so, dass es ca $\frac{1}{1000}$ der größten Distanz zweier Phasenraumpunkte entspricht. Hier kann es sein, dass man etwas mit der Größe von l rumspielen muss. Eine Genauigkeit für $D_2 \approx 2$ reicht aus. Denken Sie daran, dass Sie durch die zwei Summen eine relativ lange Auswertezeit haben.

2. (Bonus) Die oben angezeigte Methode dient nur dazu die Dimension, aber nicht die Entropie zu berechnen. Da die Entropie ein maß der Informationszunahme ist, müssen aufeinander folgende Punkte betrachtet werden. Dafür verallgemeinern wir die Methodik von oben. Statt eine Kugel um jeden Punkt zu legen, wird nun die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass aufeinander folgende Punkte gemeinsam im Abstand l zur Trajektorie liegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet sich über

$$\sum_{i_0\ldots i_n} P_{i_1\ldots i_n} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Theta(l - \sqrt{\sum_{m=1}^{n}(\vec{x}_{i+m} - \vec{x}_{j+m})^2}) \quad (3a)$$

$$\lim_{l\to 0}\sum_{i_0\ldots i_n} P_{i_1\ldots i_n} = D_2\ln(l) + nK, \quad (4a)$$

Nun kann die Korrelationsdimension D_2 und die Entropie K berechnet werden. Plotten Sie dafür $\ln(C_n)$ über $\ln(l)$ und fitten Sie eine Gerade durch die Punkte. Die Steigung gibt dabei, wie in (4a) zu sehen, D_2 und der Schnitt mit der y-Achse nK. Fitten können sie mithilfe des Befehls np.polyfit(np.log(l), np.log(C),1), wobei die 1 für ein Polynomfit ersten Grades steht. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus der vorherigen Aufgabe. Die Entropie eines Systems kann auch über die positiven Lyapunov-Exponenten berechnet werden, wobei die Summe der größten Lyapunov-Exponenten die obere Grenze der Entropie angibt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert für das Lorenz-System.
Hinweis: Dies ist eine sehr rechenintensive Aufgabe. Ein optimierter Python Code oder ein C-Code sollte hierfür genommen werden.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

Aufgabe 16 (10 Punkte): *Nonvanishing turn-on delay eines Quantenpunktlasers*

Quantum-well Laser und Quantum-dot Laser erfahren beide eine Zeitverzögerung in ihrem Anschaltverhalten, d.h. obwohl die Pumpstärke den Schwellwert überschritten hat gibt es eine Zeit t_{on} die der Laser braucht um eine Intensität I_{on} zu emittieren. Bei Quantum-well Lasern kann diese Zeit t_{on} durch erhöhen des Pumpstroms J reduziert werden und theoretisch verschwinden, also $\lim_{J\to\infty} t_{on} = 0$. Quantum-dot Laser haben dagegen eine nicht verschwindende Anschaltzeit t_{on}, egal wie groß der Pumpstrom J wird. Dies wollen wir hier numerisch und analytisch im Limit zeigen. Die Gleichungen für einen Quantum-dot Laser sind gegeben durch

$$\begin{aligned} I' &= [g(2\rho-1)-1]I \\ \rho' &= \eta[Bn(1-\rho)-\rho-(2\rho-1)I] \\ n' &= \eta[J-n-2Bn(1-\rho)], \end{aligned}$$

wobei I die Intensität ist, ρ die Besetzungswahrscheinlichkeit des Grundzustandes im Quantumdot, n die Ladungsträgerdichte im wetting layer, J die Pumpstärke, $g(2\rho-1)$ der gain, $B=\tau T_1^{-1}$ der Verhältnis von der Ladungsträger Rekombination und der Einfangzeit und $\eta=\tau_{ph}\tau^{-1}$ das Verhältnis der Photonen-Lebensdauer und Ladungsträger Rekombination.

1. Simulieren Sie das System zunächst für $J_-=1$, $g=1.25$, $B=10^2$, $\eta=2\cdot10^{-2}$ mit den Anfangsbedingungen $I(0)=10^{-4}$, $\rho(0)=0.495$ und $\eta(0)=9.8\cdot10^{-3}$ mit einem Zeitschritt $dt=0.001$ und 10000 Zeitschritten um die Transiente abzuschneiden. Ändern Sie dann die Pumpstärke $J=J_+$ auf 5-Werte zwischen 10 und 50 und plotten sie die Intensität über der Zeit ($+$ und $-$ stehen hier jeweils für den Pumpstrom vor und nach dem Anschaltvorgang). Was können Sie beobachten?

2. Man kann die Gleichungen kurz vor dem Anschaltvorgang mit $I\approx 0$ und $J=J_+$ annähern, wobei n eliminiert wird und erhält dabei für die Intensität und die Besetzungswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} I &= I_0 \exp\left(\frac{1}{\eta}G(t)\right) \\ \rho &= 1-\frac{(\exp -BF(t))}{(1-\rho_0)^{-1}+2B\int_0^t \exp\left(-BF(u)\right)du}. \end{aligned}$$

$F(t)$ und $G(t)$ sind hierbei gegeben durch

$$\begin{aligned} F(t) &= (J_+-J_-)(\exp(-t)-1)+(J_+-2)t \\ G(t) &= -(1+g)t+2g\int_0^t \rho(u)du. \end{aligned}$$

Bei Quantum-well Lasern verschwindet die Anschaltverzögerung für $J_+\to\infty$. Wir wollen diese Näherung nun für den Quantum-dot Laser durchführen. Gehen sie dafür wie folgt vor:
Nähern Sie $F(t)$ für $J_+\to\infty$ an.
Setzen Sie dann $F(t)$ in ρ und nähern Sie auch ρ für $J_+\to\infty$.
Setzen Sie das somit erhaltene ρ in $G(s)$ und setzen Sie dieses in I.
Die Anschaltverzögerung erhalten Sie, indem Sie $I=I_{on}$ setzen. Was können Sie beobachten?

8. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

`Vorlesung:`	• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im **EW 202**. • Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00. • Felix Köster, EW 629, 314-24254, `f.koester@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30