Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 23. April 2018
http://www.tu-berlin.de/?qm18

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 07.05.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

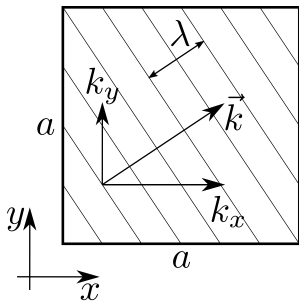
Aufgabe 3 (8 Punkte): *Plancksches Strahlungsgesetz*

(a) Die Plancksche Hypothese besagt, dass das Strahlungsfeld eines schwarzen Körpers aus einer Vielzahl von harmonischen Oszillatoren mit diskreten Energiesprektren besteht. Die mittlere Energie pro Oszillator erhält man durch Summation über die diskreten Energieniveaus. Mit den elementaren Energiequanten ϵ_0 und Boltzmannstatistik für die Anzahl $N(n)$ der Oszillatoren mit Energie $E_n = n\epsilon_0$ erhalten wir (siehe VL) die mittlere Oszillatorenergie als

$$\epsilon = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n) n \epsilon_0}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)} = \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{k_B T}} - 1}. \tag{1}$$

Beweisen Sie Gleichung 1. Der Nenner kann direkt mit der geometrischen Reihe ausgewertet werden. Für den Zähler bietet es sich an, $\sum_n n y^n = y \frac{d}{dy} \sum_n y^n$ zu verwenden.

(b) Die Herleitung der Strahlungsformel von Rayleigh kann als exakte klassische Rechnung erfolgen. Wir berechnen dazu die möglichen elektromagnetischen Eigenschwingungen in einem Würfel mit Kantenlänge a. Wir machen den folgenden Ansatz für die Felder, mit einer konstanten Feldstärke $\underline{A}_0$ und dem Wellenvektor $\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$:



$$\underline{A}(x, y, z, t) = \underline{A}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(2\pi\nu t).$$

Welche Werte können die Komponenten k_i des Wellenvektors annehmen, sodass sich stehende Wellen ausbilden? Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Zustände bis zu einer bestimmten Wellenzahl K, also $|\underline{k}| \leq K$. Beschränken Sie sich dabei nur auf positive k_i, d.h., die Zustände füllen eine Achtelkugel im k-Raum. Die Anzahl der Zustände erhalten Sie durch Division des Volumens dieses Kugelabschnitts durch das Volumen eines einzelnen Zustandes im k-Raum. Die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\nu)$ wiederum erhält man durch Division durch das Volumen des Würfels und Ableiten nach ν. Verwenden Sie dazu die Dispersionsrelation $2\pi\nu = c|\underline{k}|$. Die spektrale Energiedichte erhalten Sie durch Multiplikation der Zustandsdichte mit der mittleren Oszillatorenergie:

(i) Nach dem klassischen Gleichverteilungssatz besitzt jeder Freiheitsgrad der Schwingung im Mittel die Energie $\frac{1}{2} k_B T$. Jede Mode der Schwingung besitzt vier Freiheitsgrade: zwei Polarisationsrichtungen mit jeweils potenzieller und kinetischer Energie. Zeigen Sie, dass sich unter dieser Annahme das klassische Rayleigh-Jeans-Gesetz für die spektrale Energiedichte ergibt.

(ii) Zeigen Sie, dass sich mit der mittleren Oszillatorenergie aus Gl. (1) mit $\epsilon_0 = h\nu$ stattdessen die Plancksche Stahlungsformel ergibt.

(c) Zeigen Sie, dass die Plancksche Strahlungsformel in den Grenzwerten $h\nu \ll k_B T$ und $h\nu \gg k_B T$ in das Rayleigh-Jeans-Gesetz bzw. das Wiensche Strahlungsgesetz übergeht.

Aufgabe 4 (12 Punkte): *Eindimensionales Gaußsches Wellenpaket*

Wir wollen die Wellenfunktion zu allen Zeiten berechnen für ein Wellenpaket, das zur Zeit $t = 0$ die folgende Form hat:

$$\psi(x,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{ik_0 x}$$

(a) Prüfen Sie zuerst, ob die Wellenfunktion normiert ist.

(b) Formulieren Sie dann die Schrödingergleichung und fouriertransformieren Sie diese, um eine Bestimmungsgleichung für

$$\tilde{\psi}(k,t) \;=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \psi(x,t)$$

zu erhalten. Dabei wird aus der zweifachen Ortsableitung ein rein algebraischer Ausdruck. Berechnen Sie durch Fouriertransformation von $\psi(x,0)$ die benötigte Anfangsbedingung $\tilde{\psi}(k,0)$ und lösen Sie die Differentialgleichung für $\tilde{\psi}(k,t)$.

(c) Die zeitabhängige Wellenfunktion im Ortsraum erhalten Sie durch inverse Fouriertransformation. Zeigen und verwenden Sie dazu folgende Identitäten ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $p, q, u, v \in \mathbb{R}$):

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{-\alpha k^2 + \beta k - \gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \; e^{\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}}$$

(ii) $$\frac{p + iq}{u + iv} = \frac{pu + qv + i(qu - pv)}{u^2 + v^2}$$

Mit der Größe $a(t) := a\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{ma^2}\right)^2}$ kann das Ergebnis kompakter hingeschrieben werden. Lesen Sie aus der Formel ab, ob der Erwartungswert des Ortes x den Newtonschen Axiomen genügt.

(d) Die Breite der Verteilung wächst und kann durch $a(t)$ ausgedrückt werden. Wie lange dauert es, bis sich die Breite des Wellenpakets verdoppelt hat? Betrachten Sie zunächst ein makroskopisches Teilchen ($m = 10^{-3}$kg, $a = 10^{-3}$m) und dann als mikroskopisches Teilchen ein Elektron ($m = 10^{-30}$kg, $a = 10^{-15}$m).

Vorlesung:
- Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
- Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Klausurtermin:
- Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.

Sprechstunden:
- Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707)
- Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704)
- Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060)
- Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629)
- Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060)
- Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984