Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 11.06.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 15 (12 Punkte): *Präparation und Messung nicht kommutierender Observablen.*

Durch den Gesamtdrehimpuls ihrer Elektronenhülle können Atome ein magnetisches Moment besitzen. Der hier betrachtete Drehimpuls kann drei verschiedene Werte annehmen. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit der Präparation und Messung dieser drei Zustände.

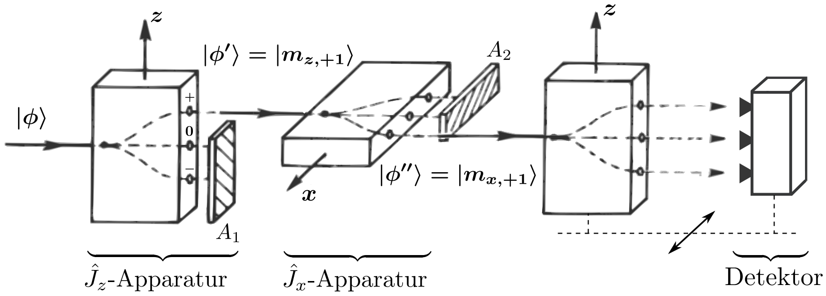

Abbildung 1: Durch sein magnetisches Moment wird ein Atom in einem räumlich variierenden Magnetfeld abgelenkt. Mittels Absorbern A_1 und A_2 kann es in einem Zustand präpariert und schließlich im Detektor gemessen werden.

Da die räumlichen Komponenten des Gesamtdrehimpulsoperators $\hat{\mathbf{J}}$ nicht kommutieren (sie erfüllen die gleichen Kommutatorrelationen wie $\hat{\mathbf{L}}$ auf Blatt 4), spielt die Reihenfolge in welcher der Zustand $|\phi\rangle$ bezüglich der Komponenten $\hat{J}_\mu$ präpariert wird eine Rolle. Für die Eigenvektoren $|m_{\mu,\nu}\rangle$ der $\hat{J}_\mu$ gilt

$$\hat{J}_\mu |m_{\mu,\nu}\rangle = \hbar m_\nu |m_{\mu,\nu}\rangle,$$

mit $\mu \in \{x, y, z\}$ und $m_\nu \in \{+1, 0, -1\}$. Um unsere Operatoren darzustellen, wählen wir als ONS die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_z$. Schreiben wir die Zustände $|\phi\rangle = c_1|m_{z,+1}\rangle + c_2|m_{z,0}\rangle + c_3|m_{z,-1}\rangle \equiv (c_1, c_2, c_3)^T$ als dreidimensinoale Vektoren, lassen sich die Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ durch folgende Matrizen darstellen;

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_z = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}.$$

und wir können folgende Aufgaben in dieser Darstellung berechnen.

(a) Überprüfen Sie die Kommutatorrelationen zwischen den einzelnen Komponenten des Drehimpulsoperators untereinander, und mit $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Messung der Komponenten des Drehimpulsoperators.

(b) Betrachten Sie die in Abb. 1 dargestellte Abfolge von Präparationen und Messung. Der Absorber A_1 bewirkt eine Präparation des Zustandes $|\phi'\rangle = |m_{z,+}\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Eigenzustände von $\hat{J}_x$ **vor** dem Absorber A_2.
A_2 bewirkt nun ein Präparation des Zustandes $|\phi''\rangle = |m_{x,+}\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Eigenzustände von $\hat{J}_z$ bei der Messung im Detektor und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten im Detektor, wenn der Absorber A_2 weggelassen wird? (In diesem Fall muss die 3. Stufe in $\mathbf{x}$-Richtung verschoben werden. So gelangt jeweils einer der drei präparierten J_x-Zustände ($\mu_x \in \{+1, 0, -1\}$) in die dritte Stufe.) Berechnen Sie die sich dadurch ergebenden neun bedingten Wahrscheinlichkeiten, und die drei totalen Wahrscheinlichkeiten für die $|m_{z,\nu}\rangle$ (d.h. die Summe über die drei Strahlen nach der $\hat{J}_x$-Apparatur).

Aufgabe 16 (8 Punkte): *Harmonischer Oszillator.*
Der eindimensionale harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

charakterisiert.

(a) Begründen Sie die Bezeichnungen von $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperator. Berechnen Sie hierzu $\hat{N}\hat{b}^\dagger\,|n\rangle$ und deuten Sie das Ergebnis.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Normierung in $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{b}^\dagger)^n|0\rangle$, und auch die folgenden Gleichungen:

$$\langle n+1|\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}, \quad \langle n-1|\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

(c) Bestimmen Sie die Unschärfen $\Delta\hat{x}\,|_n = \left(\langle n|\hat{x}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{x}|n\rangle)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sowie $\Delta\hat{p}\,|_n$ im Formalismus der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und diskutieren Sie $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}\,|_n$.

Vorlesung:	• Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202 • Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausurtermin:	• Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.
Sprechstunden:	• Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707) • Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704) • Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060) • Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629) • Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060) • Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984