Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 25.06.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 19 (12 Punkte): *Drehimpulsalgebra*

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_\pm]$ und $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$, wobei $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die in der Vorlesung eingeführten Leiteroperatoren sind.

(b) Zeigen Sie:

$$\hat{L}_\pm |lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|lm \pm 1\rangle.$$

(c) Ein System befinde sich im gemeinsamen Eigenzustand $|lm\rangle$ der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$. Zeigen Sie, dass die kleinste Streuung für $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ erreicht wird, wenn $|m| = l$ gilt. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(1) Beweisen Sie zunächst: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle = 0$ für $i = x, y$.

(2) Berechnen Sie die Streuung $\langle lm| \left(\hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle\right)^2 |lm\rangle$ für $i = x, y, z$. Warum ist $\langle lm| \left(\hat{L}_z - \langle\hat{L}_z\rangle\right)^2 |lm\rangle = 0$?

(3) Zeigen Sie nun, dass die kleinste Streuung für $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.

Aufgabe 20 (8 Punkte): *Kugelflächenfunktionen*

Die Eigenfunktionen der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ in Ortsdarstellung sind gerade die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l.$$

(a) Zeigen Sie die Paritätssymmetrie $Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

(b) Visualisieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der möglichen Eigenfunktionen $|lm\rangle$ des Drehimpulsoperators für $l \in \{0, 1\}$. Plotten Sie außerdem die p_x und p_y-Orbitale, die durch

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\,\text{-}1\rangle - |1\,1\rangle\big) \qquad p_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\big(|1\,\text{-}1\rangle + |1\,1\rangle\big)$$

gegeben sind.
Hinweis: Benutzen Sie in Mathematica den Befehl `SphericalPlot3D`. Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sind durch `SphericalHarmonicY[l,m,`θ`,`ϕ`]` gegeben. Das auf der Webseite der Vorlesung zur Verfügung gestelle Applet kann ebenso verwendet werden.

Aufgabe 21 (Bonus: 10 Punkte): *Teilchen im Zylinderpotential.*
Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem anziehenden, im Unendlichen hinreichend schnell verschwindenden Zylinderpotential:

$$V(\mathbf{r}) = V(r) = -\frac{c}{r^\alpha}; \qquad \alpha > 1,$$

mit den Zylinderkoordinaten r, φ, z.

- Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf.
- Zerlegen Sie diese in eine Axial-, eine Radial- und eine Winkelgleichung.
- Die Radialgleichung ist von der Struktur:

  $$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + F(r) \right) R(r) = 0$$

  Durch welche Substitution für $R(r)$ lässt sich der lineare Term $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ zum Verschwinden bringen?
- Diskutieren Sie das Verhalten der Radialfunktion eines gebundenen Zustandes für $r \to 0$ und $r \to \infty$, falls $1 < \alpha < 2$.

Vorlesung:	• Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202 • Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausurtermin:	• Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.
Sprechstunden:	• Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707) • Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704) • Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060) • Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629) • Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060) • Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984