PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

6. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Di. 12.06.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (6 Punkte): *Dichte-Responsefunktion*

Berechnen Sie die Dichte-Responsefunktion $\chi_0(\mathbf{q},\omega)$ im Rahmen der kinetischen Theorie,

$$\chi_0(\mathbf{q},\omega) \quad \equiv \quad \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{q}\nabla_{\mathbf{p}} f_0(\mathbf{p})}{\omega + i\delta - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{q}},$$

für ein Gas wechselwirkungsfreier Elektronen bei der Temperatur $T = 0$ in drei Dimensionen. Hinweis: Führen Sie die kombinierte Variable $x = \omega/(v_F q)$ ein, wobei v_F die Fermi-Geschwindigkeit ist ($\frac{1}{2}mv_F^2 = E_F$, Fermi-Energie). Beachten Sie weiterhin, dass

$$-\frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} f_0(\mathbf{p}) = \delta(E_F - \varepsilon_p), \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}.$$

Aufgabe 14 (14 Punkte): *Lindhard-Function*
Sei der Hamiltonian eines Freielektronengases $\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}$.

- Zeigen Sie, dass der Vernichtungsoperator im Wechselwirkungsbild zu $\widetilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}t} c_{\mathbf{k}\sigma}$ wird.

- Aus der Definitionen

  $$\chi_0(\mathbf{q},\omega) \equiv \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \chi_0(\mathbf{q},t); \quad \Im\omega > 0,$$

  und

  $$\chi_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}(t-t') \equiv i\langle[\widetilde{\rho}_{\mathbf{q}}(t), \widetilde{\rho}_{-\mathbf{q}'}(t')]\rangle_{\mathbf{eq}} \theta(t-t') \equiv L^d \chi_0(\mathbf{q}, t-t')\delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'},$$

  zeigen Sie, dass die Lindhard-Function (Dichteresponsefunction) schreibt man

  $$\chi_0(\mathbf{q},\omega) = -\frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) - f(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{\omega + i\delta + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}.$$

- Vergleichen Sie die Linhard-Function mit dem semiklassischen Ausdruck (Aufgabe 13) im langwelligen Limes.

- Berechnen Sie explizit $\chi_0(\mathbf{q},\omega)$ in $d = 3$ Dimensionen.