PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

9. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Di. 10.07.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 20 (10 Punkte): *1d-Ising-Modell*

Das Ising-Modell liefert eine idealisierte Beschreibung eines Ferromagneten. Für jeden Gitterpunkt i ist eine Variable s_i definiert, die die beiden Werte $s_i = \pm 1$ annehmen kann. Ferner wird eine Wechselwirkung zwischen den Gitterpunken i und j eingeführt. Ein solches System mit einem äußeren Magnetfeld hat die Hamilton-Funktion

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - \mu B_0 \sum_i s_i.$$

Die magnetische Induktion $\mathbf{B_0} = (0, 0, B_0)$ definiert die z-Richtung, relativ zu der sich die Momente parallel oder antiparallel ausrichten.
Betrachten Sie ein eindimensionales Ising-Modell, bei der sich eine Wechselwirkung nur auf die unmittelbar benachbarten Spins beschränkt, so dass sich eine Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \sum_{s_1, \ldots s_N = \pm 1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} (h s_i + K s_i s_{i+1}) \right)$$

ergibt. Hierbei ist $h = \beta \mu B_0$ und $K = \beta J$. Es werden periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $s_{N+1} = s_1$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}$ die folgende Bedingung erfüllt $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left\{T^N\right\}$, wenn die Matrix T gegeben ist durch

   $$T = \begin{pmatrix} e^{h+K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{-h+K} \end{pmatrix}.$$

   Hinweis:
   Das Argument der Exponentialfunktion läßt sich schreiben als $h(s_i + s_{i+1})/2 + K s_i s_{i+1}$

2. Zeigen Sie dass $\mathcal{Z}$ geschrieben werden kann als

   $$\mathcal{Z} = \lambda_+^N + \lambda_-^N,$$

   wobei $\lambda_+ > \lambda_-$ die Eigenwerte der Matrix T sind.

3. Berechenen Sie diese Eigenwerte und zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $N \to \infty$

   $$\frac{\ln \mathcal{Z}}{N} = \ln \lambda_+ = K + \ln\left(\cosh(h) + (\sinh^2(h) + e^{-4K})^{\frac{1}{2}} \right)$$

   gilt. Diese Methode zur Bestimmung der Zustandssumme heißt Transfer-Matrix methode.

4. Bestimmen Sie die mittlere Magnetisierung und zeigen Sie, dass die Magnetisierung für $h \to 0^+$ verschwindet.