

Prof. Dr. Harald Engel  
Dr. Jan F. Tötz

## 1. Übungsblatt – TP VI: Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

**Abgabe: Bis Do. 17.05.2018 16:15 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

### Aufgabe 1 (8 Punkte): Boltzmann-Verteilung

Ein thermodynamisches System bestehe aus  $N$  Atomen im Volumen  $V$ , von denen jedes ein magnetisches Moment  $\mu_i$  mit  $|\mu_i| = \mu$  trägt. Die Hamilton-Funktion setze sich aus zwei Anteilen zusammen,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

von denen  $H_0$  das System in Abwesenheit eines magnetischen Feldes beschreibt, während  $H_1$  den Einfluss des homogenen Feldes  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  erfasst.

- (a) Wie lautet der Feldterm  $H_1$ ?
- (b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.
- (c) Bestimmen Sie die Temperatur- und Feldabhängigkeit des mittleren magnetischen Gesamtmoments:

$$\mathbf{m} = \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_i \right\rangle.$$

- (d) Diskutieren Sie das magnetische Gesamtmoment  $m$  für die beiden Grenzfälle  $\beta\mu B \gg 1$  und  $\beta\mu B \ll 1$  (Klassischer Langevin-Paramagnetismus).

### Aufgabe 2 (6 Punkte): Gibbs'sches Paradoxon und Mischungsentropie

In dieser Aufgabe sollen die Grenzen der Annahme von unterscheidbaren Teilchen untersucht werden.

- (a) Zeigen Sie, dass, für ein klassisches Gas aus unterscheidbaren Teilchen die Entropie  $S$  gegeben ist durch

$$S(N, T, V) = Nk_B \ln V + \frac{3}{2}Nk_B \left[ 1 + \ln \left( \frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right) \right].$$

Die Variablen  $N$ ,  $T$  und  $V$  stehen für die Teilchenzahl, die Temperatur und das Volumen. Die Konstanten  $m$ ,  $k_B$  und  $h$  sind Masse, Boltzmann-Konstante und Wirkungsquantum.

- (b) Man betrachte jetzt zwei verschiedene Gase mit den Volumina  $V_1$  und  $V_2$ , den Teilchenmassen  $m_1$  und  $m_2$ , bestehend aus  $N_1$  bzw.  $N_2$  Teilchen in zwei durch eine Trennwand voneinander getrennten Behältern. Die Dichten  $N_i/V_i$  beider Gase seien gleich. Zeigen Sie, dass die Gesamtentropie des Systems nach dem Entfernen der Trennwand gegenüber der Summe der Einzelentropien erhöht wird um

$$\Delta S = k_B \left[ N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2} \right].$$

Dies ist die sogenannte Mischungsentropie.

## 1. Übung SS 18

- (c) Betrachtet man zwei identische Gase, so führt das Mischen ebenfalls zu einer Entropiezunahme  $\Delta S$ . Das darf allerdings nicht sein, da das Mischen gleichartiger Gase mit gleichen Dichten ein reversibler Prozess ist (das Wiedereinsetzen der Trennwand stellt den Ausgangszustand wieder her im Gegensatz zu dem Fall in dem eine tatsächliche Mischung stattfindet). Dies ist das Gibbs'sche Paradoxon. Zeigen Sie, dass man dieses Paradoxon beheben kann, indem man den sogenannten Gibbs'schen Korrekturfaktor  $N!$  einführt:

$$Z = \frac{1}{N!} Z_1^N.$$

Dies ist die Zustandssumme für ununterscheidbare Teilchen.

### Aufgabe 3 (6 Punkte): Entropiewachstum auf dem Weg ins Gleichgewicht

Betrachten Sie eine Menge von Münzen, die auf einer Oberfläche liegen, so dass sie entweder den Zustand Kopf oder Zahl annehmen können. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  zeigen alle Münzen Kopf. In Zeitabständen  $dt$  erfolgen Störungen auf das System, wodurch sie mit einer Übergangswahrscheinlichkeit  $dw = \lambda dt$  ihren Zustand wechseln. Sei  $p(t)$  die Wahrscheinlichkeit des Zustandes Kopf und  $q(t) = 1 - p(t)$  die Wahrscheinlichkeit des Zustandes Zahl zum Zeitpunkt  $t$ .

- (a) Wie groß ist die Entropie  $S(t) = -p(t) \ln p(t)$  zum Anfang bei  $t = 0$ ?
- (b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit  $p$  zum Zeitpunkt  $t + dt$ ?
- (c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) um ein Anfangswertproblem für die Wahrscheinlichkeit  $p(t)$  zu formulieren und lösen Sie es.
- (d) Was ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der Entropie? Berechnen Sie die Grenzwerte für  $t \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow \infty$ . Erstellen Sie eine aussagekräftige Skizze.

**Vorlesung:**

- Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.

**Website:**

- <http://www.tu-berlin.de/?193618>

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

#### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- J. L. Klimontovich, Statistical Theory of Open Systems, Volume 1: A Unified Approach to Kinetic Description of Processes in Active Systems. (Kluwer, New York, 1995)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. (Wiley, 1971).
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Springer, 1984.
- H. Haken, Synergetik. Eine Einführung. Nichtgleichgewichtsphasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie. (Springer, 1983; 3. korrigierte und erweiterte Auflage).
- H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in non-physical systems, Reviews of Modern Physics 47(1), 67 - 121(1975).
- R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, I+II. (Gordon and Breach, 1965, 1967).