Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Jan F. Totz

2. Übungsblatt – TP VI: Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Bis Do. 24.05.2018 16:15 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *H-Theorem*

Der Informationsgewinn beim Übergang von der Wahrscheinlichkeitsdichte $P_1(x,t)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2(x,t)$ ist definiert durch:

$$K[P_1, P_2] := \int \mathrm{d}x P_1(x,t) \ln \frac{P_1(x,t)}{P_2(x,t)}, \qquad x \in X^n.$$

Seien $P_1(x,t)$ und $P_2(x,t)$ Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung,

$$\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x) P_i(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(D(x) P_i(x,t) \Big) \right), \tag{1}$$

zu unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Beweisen Sie, dass K ein Lyapunov-Funktional ist, indem Sie die folgenden Eigenschaften verifizieren:

(i) $K[P_1, P_2] \geq 0 \wedge K = 0$ für $P_1(x,t) = P_2(x,t)$

(ii) $\frac{d}{dt} K[P_1, P_2] = -\frac{1}{2} \int dx D(x) \frac{P_2^2(x,t)}{P_1(x,t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_1(x,t)}{P_2(x,t)} \right) \right)^2 \leq 0$

Interpretation:
Wählen wir $P_2(x,t) =: P^0(x)$, so bleibt der Beweis gültig. Das bedeutet, dass sich jeder Anfangsverteilung eines stochastischen Systems, dessen zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte P_i der FPE (1) genügt, genau eine stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2(x,t) =: P^0(x) = \lim_{t\to\infty} P(x,t)$ zuordnen lässt. Diese eindeutige Zuordnung wird uns als Ausgangspunkt für die Klassifikation von Bifurkationen in stochastischen dynamischen Systemen dienen.

Bemerkungen:

1) Die Beweise für $n = 1$ und $n > 1$ sind analog.

2) Der Satz gilt auch dann, wenn P der Mastergleichung genügt. In diesem Fall ist zusätzlich vorauszusetzen, dass der Zustandsraum X^n unzerlegbar ist, d.h. jeder Zustand $x \in X^n$ muss erreichbar sein (keine isolierten Regionen in X^n).

2. Übung SS 18

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Master-Gleichung*

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei physikalische Prozesse, die durch die folgende Mastergleichung beschrieben werden:

$$\dot{p}_n = r_{n+1}p_{n+1} + g_{n-1}p_{n-1} - (r_n + g_n)p_n.$$

Hierbei ist p_n die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $n \in \mathcal{Z}$. Die Koeffizienten g_{n-1} und r_{n+1} geben die Wahrscheinlichkeitsraten für Übergänge zwischen den Zuständen $n-1 \to n$ und $n+1 \to n$ an. Verschiedene physikalische Prozesse lassen sich beschreiben durch Angabe der Raten g_n und r_n, die Anzahl der Zustände n und eine Anfangsbedingung $p_n(t = 0)$.

(a) Poisson Prozess

$$r_n = 0; \qquad g_n = q; \qquad n \geq 0; \qquad p_n(0) = \delta_{n,0}$$

Lösen Sie die Mastergleichung direkt für $p_n(t)$. Plotten und interpretieren Sie das Ergebnis. Lösen Sie außerdem die Mastergleichung mit Hilfe der charakteristischen Funktion $G(s,t) = \sum_n s^n p_n(t)$ und verifizieren Sie, dass die so erhaltene Lösung mit der direkten übereinstimmt.

(b) Symmetrischer Random Walk

$$r_n = g_n = 1; \qquad -\infty < n < \infty; \qquad p_n(0) = \delta_{n,0}$$

Lösen Sie die Mastergleichung mit Hilfe der charakteristischen Funktion $G(s,t)$ und leiten Sie daraus $p_n(t)$ ab.

Vorlesung:
- Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.

Website:
- http://www.tu-berlin.de/?193618

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- J. L. Klimontovich, Statistical Theory of Open Systems, Volume 1: A Unified Approach to Kinetic Description of Processes in Active Systems. (Kluwer, New York, 1995)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. (Wiley, 1971).
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Springer, 1984.
- H. Haken, Synergetik. Eine Einführung. Nichtgleichgewichtsphasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie. (Springer, 1983; 3. korrigierte und erweiterte Auflage).
- H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in non-physical systems, Reviews of Modern Physics 47(1), 67 - 121(1975).
- R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, I+II. (Gordon and Breach, 1965, 1967).