Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Jan F. Totz

3. Übungsblatt – TP VI: Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Bis Do. 31.05.2018 16:15 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 6 (20 Punkte): *Logistisches Wachstum*

Ein stochastisches Modell für das logistisches Modell für das logistische Wachstum zum Beispiel einer Bakterienpopulation ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda(t)x(t) - x(t)^2, \\ \lambda(t) &= \lambda + \sigma\zeta(t), \\ \langle\zeta(t)\rangle &= 0, \\ \langle\zeta(t+\tau)\zeta(t)\rangle &= \delta(\tau), \\ 0 &\leq x(t) < \infty, \\ \sigma &> 0. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die stationären Zustände der deterministischen Gleichung ($\sigma = 0$) an sowie ihre Stabilität.

(b) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für den deterministischen Fall mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$. Welcher stationäre Zustand wird erreicht für $t \to \infty$?

(c) Leiten Sie die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\right)x - x^2\right)P(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2 x^2 P(x,t)\right)$$

aus der Langevin-Gleichung für $\sigma > 0$ ab.

(d) Geben Sie die normierte stationäre Lösung $P_0(x)$ der Fokker-Planck-Gleichung bei natürlichen Randbedingungen an. Warum muss $lambda > 0$ angenommen werden?

(e) Berechnen Sie das n-te Moment $\langle x^n\rangle$ und geben Sie $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ explizit an.

(f) Geben Sie den wahrscheinlichsten Wert $\hat{x}$ der stationären Lösung an, d.h. den Wert, bei dem $P_0(x)$ ein Maximum hat.

(f) Vergleichen Sie $\langle x\rangle$ und $\hat{x}$ mit den stationären Zuständen der deterministischen Gleichung. Diskutieren Sie das Bifurkationsverhalten für $\hat{x}$ im stochastischen und der stationären Zustände im deterministischen Fall.

Tipp: Die Gammafunktion ist für positive reelle x definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}e^{-t}$$

und es gilt

$$\Gamma(x + 1 = x\Gamma(x).$$

Vorlesung:
- Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.

Website:
- http://www.tu-berlin.de/?193618

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- J. L. Klimontovich, Statistical Theory of Open Systems, Volume 1: A Unified Approach to Kinetic Description of Processes in Active Systems. (Kluwer, New York, 1995)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. (Wiley, 1971).
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Springer, 1984.
- H. Haken, Synergetik. Eine Einführung. Nichtgleichgewichtsphasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie. (Springer, 1983; 3. korrigierte und erweiterte Auflage).
- H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in non-physical systems, Reviews of Modern Physics 47(1), 67 - 121(1975).
- R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, I+II. (Gordon and Breach, 1965, 1967).