Prof. Dr. Harald Engel
Dr. Jan F. Totz

4. Übungsblatt – TP VI: Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Bis Do. 31.05.2018 16:15 Uhr vor Beginn des Tutoriums im EW 731

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 7 (20 Punkte): *Genetisches Modell*

In dieser Aufgabe sollen Sie den Einfluss von Rauschen auf Phasenübergänge am Beispiel von genetischen Selektionsvorgängen in der Biologie untersuchen.

Betrachten Sie eine haploide Zellpopulation, die an einem Genlokus eine von zwei Allelen, A oder B, aufweisen kann. Die Größe der Gesamtpopulation ergibt sich somit als Summe aus den Subpopulationen, die einen der beiden Genotypen besitzen: $N = N_A + N_B$. Die Gesamtpopulation sei konstant aufgrund äußerer Umweltbedingungen (endliches Nahrungsangebot, Fressfeinde, etc) und hinreichend groß, so dass interne Fluktuationen vernachlässigbar sind.

(a) Wie lautet die Änderung Δp_i der relativen Populationen $p_A = N_A/N$ und $p_B = N_B/N$ von einer Generation zur nächsten unter Berücksichtigung von

 (i) zufälligen Mutationen (mit Mutationsraten $w_{A\to B} = w_{B\to A}$)

 (ii) natürlicher Selektion?

 Nehmen Sie an, dass natürliche Selektion die Reproduktionsrate der Populationsdynamik $N_i = r_i N_i$ beeinflusst: $r_A = 1 + \eta_t/2$ und $r_A = 1 - \eta_t/2$. Hierbei ist η_t der Selektionskoeffizient pro Generation t, der durch einen diskreten stochastischen Prozess beschrieben wird.

(b) Welche Annahmen sind notwendig, um die diskrete stochastische Entwicklung von $x := p_A$ aus (a) als folgende Langevin-Gleichung,

$$\partial_t x = \alpha - x + (\lambda + \sigma\xi)x(1-x), \tag{1}$$

 zu formulieren? Bestimmen Sie die Fixpunkte der deterministischen Dynamik (Rauschstärke $\sigma = 0$) sowie ihre lineare Stabilität als Funktion der Selektionsrate $\lambda \in \mathbb{R}$ und plotten Sie diese.

(c) Stellen Sie für $\alpha = 1/2$ die zu (1) äquivalente Fokker-Planck Gleichung auf. Verifizieren Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_0(x)$ für natürliche Randbedingungen als

$$p_0(x) = N\frac{1}{x(1-x)}\exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{1}{2x(1-x)} - \lambda\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right)\right]. \tag{2}$$

 Nutzen Sie eine geeignete modifizierte Besselfunktion, um den Normierungsfaktor N für $\lambda = 0$ auszudrücken.

(d) Bestimmen Sie die Extrema der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_0(x)$ (2). Plotten Sie $p_0(x)$ für $\lambda = 0$ sowie zwei verschiedene Rauschstärken $\sigma = 0$ und $\sigma = 16$. Bestimmen Sie die kritische Rauschstärke σ_c, bei der eine qualitative Änderung der Dynamik auftritt. Interpretieren Sie ihr Ergebnis in Bezug auf den Polynomgrad der Bestimmungsgleichung der Maxima im deterministischen und stochastischen Fall. Welche Trajektorien $x(t)$ liegen der Verteilung $p_0(x)$ zugrunde?

(e) Bestimmen Sie die Extrema von $p_0(x)$ als Funktion von λ für $\sigma = 4$ und $\sigma = 16$. Plotten Sie diese zusammen mit dem Ergebnis aus (b). Interpretieren Sie ihr Resultat in Bezug auf die Ordnung des Phasenübergangs und das Verhalten der Populationen N_A und N_B.

(f) Bestätigen Sie Ihre Resultate für $\lambda = 0$ durch numerische Simulationen der Langevin- (1) und Fokker-Planck (2) Gleichungen für $\sigma \in 0, 4, 16$.

Vorlesung:

- Mo 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
- Mi 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.

Website:

- http://www.tu-berlin.de/?193618

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Abgeschlossene Projektarbeit.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- J. L. Klimontovich, Statistical Theory of Open Systems, Volume 1: A Unified Approach to Kinetic Description of Processes in Active Systems. (Kluwer, New York, 1995)
- P. Glansdorff, I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. (Wiley, 1971).
- W. Horsthemke, R. Lefever, Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Springer, 1984.
- H. Haken, Synergetik. Eine Einführung. Nichtgleichgewichtsphasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie. (Springer, 1983; 3. korrigierte und erweiterte Auflage).
- H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in non-physical systems, Reviews of Modern Physics 47(1), 67 - 121(1975).
- R.L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, I+II. (Gordon and Breach, 1965, 1967).