11.1 Oszillatorische aktive Medien

Als oszillatorische Medien wollen wir Systeme bezeichnen, die durch gekoppelte PDE der Form

$$\frac{\partial \underline{u}(\underline{r},t)}{\partial t} = \underline{F}\big(\underline{u}(\underline{r},t);\mu\big) + \underline{\nabla}^2 \underline{u}(\underline{r},t)\,,\ \ \underline{u}(\underline{r},t) \in \Re^n\,,\ \ \mu \in C^k\,. \qquad (1).$$

beschrieben werden. Die lokalen Reaktionskinetiken $\underline{F}$ seien so gewählt, dass die Funktionen $\underline{u}(t)$ in einem Punkt $\underline{r}$ eine nichtlineare Schwingung ausführen, also im Phasenraum einen Grenzzyklus besitzen. Durch den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung sind die lokalen Schwinger diffusiv (also kurzreichweitig) miteinander gekoppelt. μ sei ein externer Parameter.

Sind die Komponenten $u_i(\underline{r},t)$, $i=1,...,n$ die Konzentrationen von chemisch reagierenden Stoffen, dann ist (1) eine Reaktions-Diffusionsgleichung. Ist die i-te Komponente die Temperatur, dann beschreibt der Kopplungsterm die Wärmeleitung und das entsprechende F_i eine Wärmequelle oder –senke. Weitere Anwendungen für Gleichungen vom Typ (1) beziehen sich auf die Populationsdynamik, die Ladungsträgerdichten in Halbleitern usw.

Stabilität des räumlich homogenen Zustandes $\underline{u}^0$: $\underline{F}(\underline{u}^0;\mu)=0$ gegen unausweichliche infinitesimal kleine Störungen: Wir setzen wie immer $\underline{u}=\underline{u}^0+\delta\underline{u}$ und erhalten

$$\frac{\partial(\delta\underline{u})}{\partial t} = \hat{L}\,\delta\underline{u} + \text{Terme nichtlinear in } \delta\underline{u}\text{, wobei } L_{i,j}(\mu) := \left.\frac{\partial F_i(\underline{u};\mu)}{\partial u_j}\right|_{\underline{u}=\underline{u}^0(\mu)} + \underline{\nabla}^2\,.$$

Die lineare PDE $\frac{\partial(\delta\underline{u})}{\partial t} = \hat{L}(\delta\underline{u})$ kann im unendlich ausgedehnten System durch Fouriertransformation gelöst werden, $\delta\underline{u} = \underline{u}_p e^{i\underline{k}\underline{r}+\lambda t}$. Das führt auf das Eigenwertproblem

$$\hat{L}\underline{u}_p = \lambda(k^2,\mu)\ \underline{u}_p\,.$$

Zum Spektrum des linearen Stabilitätsoperators machen wir folgende Annahmen:

(i) für $\mu<0$ besitzen alle Eigenwerte eine negativen Realteil, $\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mu)<0$, $i=1,...,n.$, d.h., $\underline{u}^0$ ist stabil gegen kleine Störungen.

(ii) bei $\mu = 0$ schneidet genau ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte die imaginäre Achse, $\mathrm{Re}\lambda_{1/2}(\mu) < \pm i\omega_0$, $\mathrm{Re}\lambda_i(\mu) < 0$, $i = 3,...,n$.

Also wird der homogene stationäre Zustand $\underline{u}^0$ bei $\mu = 0$ durch eine superkritische Hopf-Bifurkation destabilisiert. Es entsteht eine neuer Attraktor, ein stabiler Grenzzyklus. An der Schwelle gilt $\delta\underline{u} = A e^{i\omega_0 t}\ \underline{U}$, A ist eine komplexwertige Amplitude $A = Re^{i\phi}$ mit $R_S = |A(t \to \infty)| \sim \sqrt{\mu}$ und U der Eigenvektor von $\hat{L}$ zum Eigenwert $\pm i\omega_0$. Zwischen diesem Eigenwert und den verbleibenden links davon liegenden i = 3, …, n Eigenwerten mit $\mathrm{Re}\lambda_i(\mu) < 0$ existiere eine Lücke im Spektrum von $\hat{L}$. Die entsprechenden stabilen Moden relaxieren auf charakteristischen Zeitskalen $\tau \le (\mathrm{Re}\lambda_3)^{-1}$.

(iii) $\mu > 0$: leicht oberhalb der Schwelle ist $\mathrm{Re}\lambda_1(\mu) = \mu\lambda_1 + i\omega_0$, $\lambda_1 = \lambda_1' + i\lambda_1'$ ($\lambda_1(\mu)$ und λ_1 sind unterschiedliche Größen). Die Lösungsstruktur bleibt erhalten, allerdings wird A zu einer langsam veränderlichen Funktion der Zeit entsprechend

$$\frac{dA}{d\tau} = \mu\lambda_1 A, \quad \tau \sim |\mu\lambda_1'|^{-1} \xrightarrow{\mu \to 0^+} \infty . \qquad (2)$$

Wir beobachten Zeitskalentrennung mit langsam veränderlicher Amplitude A (und Phase ϕ) auf einer charakteristischen Zeitskala $\tau >> T_0 = 2\pi/\omega_0$. Die Zeitskalentrennung ist um so besser erfüllt, ja näher wir uns am Schwellwert/Bifurkationspunkt $\mu = 0$ befinden.

Das exponentielle Anwachsen der Amplitude gemäß (2) wird durch nichtlineare Terme begrenzt

$$\frac{dA}{d\tau} = \mu\lambda_1 A + f(A, A^*) .$$

Um die unbekannte nichtlineare Funktion f(A,A*) zu bestimmen nutzen wir aus, dass die Phase für einen lokalen Grenzzyklus unbestimmt ist: Eine kleine Störung eines stabilen Grenzzyklus relaxiert auf den Grenzzyklus zurück, d.h., die Amplitudenstörung verschwindet im Laufe der Zeit, aber die Phase zum Zeitpunkt der Störung wird nicht wieder erreicht. Deshalb sollte die gesuchte Gleichung invariant gegen Phasenverschiebungen

$A \to A' = A\,e^{i\varphi}$ sein. Quadratische Terme A^2, $(A^*)^2$ und AA^* erfüllen diese Invarianzbedingung nicht, von den kubischen Termen kommt nur $|A^2|A$ in Frage, also

$$\frac{dA}{d\tau} = \mu\lambda_1 A - g\,|A^2|A, \; g = g' + i\,g'' \quad . \qquad (3)$$

(3) heißt Stuart-Landau-Gleichung (Normalform in der Nähe einer superkritischen Hopf-Bifurkation). Man überzeugt sich leicht, dass (3) für $\mu > 0$ homogenen Oszillationen beschreibt, indem man Realteil und Imaginärteil von $A = R\,e^{-i\phi}$ trennt, denn dann folgt

$$\frac{dR}{d\tau} = (\mu\lambda_1' - g' R^2) \Rightarrow R(\tau \to \infty) = R_S = \sqrt{\frac{\mu\lambda_1'}{g'}}$$ Amplitude der homogenen Oszillation

und

$\frac{d\phi}{d\tau} = \mu\lambda_1'' - g'' R^2$, also im stationären Fall $\frac{d\phi}{d\tau} = \mu\lambda_1'' - g''\frac{\mu\lambda_1'}{g'}$ oder $\phi(t) = \omega t + \phi_0$

mit der Frequenzkorrektur $\omega = \mu(\lambda_1'' - g''\frac{\lambda_1'}{g'})$. Also ist $R_S \sim \sqrt{\mu} := \varepsilon$ und $\Delta\omega \sim \mu = \varepsilon^2$.