

### 3.5 Lösungen der Fokker-Planck-Kolmogorov-Gleichung

a) Stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte im eindimensionalen Fall  $(-\infty < x < \infty)$

Aus  $\frac{\partial P^0}{\partial t} = 0$  folgt  $G^0(x) = F \cdot P^0 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(D \cdot P^0) = \text{const} = 0$ , denn der Wahrscheinlichkeitsfluss  $G^0$  muss im eindimensionalen Fall bei  $x \rightarrow \pm\infty$  verschwinden, um die Normierbarkeit von  $P^0$  zu sichern. Folglich ist

$$\left( F - \frac{1}{2} \frac{dD}{dx} \right) P^0 - \frac{1}{2} D \frac{dP^0}{dx} = 0, \quad \frac{F - \frac{1}{2} \frac{dD}{dx}}{\frac{1}{2} D} dx = \frac{dP^0}{P^0}, \quad P^0 = N^{-1} \exp \left\{ 2 \int^x dz \frac{F(z)}{D(z)} - \underbrace{\int^x dz \frac{1}{D} \frac{dD}{dz}}_{-\ln D(x)} \right\}$$

also

$$P^0(x) = \frac{N^{-1}}{D(x)} \exp \left( 2 \int^x dz \frac{F(z)}{D(z)} \right). \quad (1)$$

Daraus folgt für additives Rauschen ( $D = \text{const}$ )  $P^0(x) = N^{-1} e^{-\frac{2}{D}V(x)}$ , mit  $V(x) := -\int^x dz F(z)$ .

Die Normierungskonstante  $N$  wird aus der Bedingung  $\int_{-\infty}^{\infty} dx P^0(x)$  bestimmt.

□ **Beispiel:** Für eine überdämpfte Bewegung Brown'scher Teilchen im bistabilen Potential unter dem Einfluss  $\delta$ -korrelierter stochastischer Stöße der Intensität  $\sqrt{D}$  entsprechend

$\underbrace{m}_{\text{klein}} \ddot{x} + \gamma \dot{x} + a x + b x^3 = \zeta(t)$ ,  $b > 0$ ,  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ , und  $\langle \zeta(t+\tau) \zeta(t) \rangle = D \delta(\tau)$  folgt

$$P^0(x) = N^{-1} \exp \left\{ -\frac{2}{D} \underbrace{\left( \frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{2} x^4 \right)}_{V(x;a,b)} \right\}.$$

Für  $a > 0$  haben  $V$  und  $P^0$  ein Minimum bzw. Maximum. Bei  $a = 0$  findet der Übergang von zu einem Doppelmuldenpotential  $V$ , dessen lokalen Minima zwei lokale Maxima von  $P^0$  entsprechen. In beiden Fällen liegen Minima von  $V$  genau unterhalb der Maxima von  $P^0$  und umgekehrt.

Der Einfluss der Fluktuationen äußert sich lediglich in einer "Verschmierung" der deterministischen stationären Zustände (Fixpunkte). Allerdings kann das Brown'sche Teilchen die Potentialbarriere zwischen den beiden Minima von  $V$  infolge der stochastischen Stöße in einer endlichen Zeit, der sogenannten *mean-first-passage-time*, überwinden (Kap. 5).

b) Verallgemeinerung auf n-Dimensionen  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X^n$

Wegen  $\frac{\partial P(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \underline{G}(\underline{x}, t) = 0$  genügt  $P^0(\underline{x})$  wieder  $\text{div} \underline{G}^0(\underline{x}) = 0$  (Fall sogenannter

natürlicher Randbedingungen). Die Komponenten des Wahrscheinlichkeitsstroms sind

$$G_i(\underline{x}, t) = F_i(\underline{x}) P(\underline{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [D_{ij}(\underline{x}) P(\underline{x}, t)], \quad (2)$$

mit Drift-Moment  $F_i(\underline{x}) := \int d^n r \, r_i w(\underline{x}, r)$  und Diffusions-Moment  $D_{ij}(\underline{x}) := \int d^n r \, r_i r_j w(\underline{x}, r)$ ,

vgl. (1) bzw. (2). Im mehrdimensionalen Fall ( $n > 1$ ) folgt aus  $\text{div} \underline{G}^0(\underline{x}) = 0$  nicht mehr

$\underline{G}^0(\underline{x}) = 0$ : Das Vektorfeld  $\underline{G}^0(\underline{x})$  ist zwar quellenfrei (aber nicht konstant), da rotierende stationäre Wahrscheinlichkeitsströme auftreten können.

Eine stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $P^0(\underline{x})$  lässt sich dann aus der Bedingung

$\text{div} \underline{G}^0(\underline{x}) = 0$  bestimmen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i)  $F_i(\underline{x}) = -\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial x_i}$ , also  $\text{rot} \underline{F}(\underline{x}) = 0$  → Driftfeld ist Gradientenfeld,

(ii)  $D_{ij}(\underline{x}) = D(\underline{x}) \delta_{ij}$  → isotrope Fluktuationen,

(iii)  $G_i^0(\underline{x}) = F_i(\underline{x}) P^0(\underline{x}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [D(\underline{x}) P^0(\underline{x})] = 0, \forall \underline{x} \in X^n$  → detaillierte Balance und

(iv)  $\frac{\partial D}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial D}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i}$  → Integrabilitätsbedingung.

Dann ist

$$P^0(\underline{x}) = \frac{N^{-1}}{D(\underline{x})} \exp(-V_s(\underline{x})), \text{ wobei } V_s(\underline{x}) \text{ aus } \frac{\partial V_s(\underline{x})}{\partial x_i} = \frac{2}{D(\underline{x})} \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial x_i} \quad (3)$$

zu ermitteln ist. Für additives Rauschen,  $D = \text{const}$ , folgt  $V_s(\underline{x}) = \frac{2}{D} V(\underline{x})$ . Bedingung (iii)

erzwingt einen verschwindenden stationären Wahrscheinlichkeitsstrom im mehrkomponentigen Fall.

Bem.: Zeitabhängige analytische Lösungen  $P(\underline{x}, t)$  der FPKE sind nur in Ausnahmefällen bekannt.

Für lineare Drift und konstante Diffusionskoeffizienten (Haken, § 6.5.1, S. 186)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\gamma x P - \frac{D}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \text{ folgt } P^0(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi D}} e^{-\frac{\gamma x^2}{D}} \text{ und eine Gauß-Verteilung}$$

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x - b(t)]^2}{a(t)} \right\} \text{ mit } a(t) = \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + a_0 e^{-2\gamma t} \text{ und } b(t) = b_0 e^{-\gamma t}. \quad (4)$$

Die Gaußverteilung (4) besitzt den Erwartungswert, die Varianz und die Korrelationsfunktion

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x P(x, t) = b_0 e^{-\gamma t}, \quad \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = a(t) \text{ bzw. } \langle x(t) x(t') \rangle = \frac{1}{2} \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma t}.$$

Lösung (4) ist auf den n-dimensionalen Fall verallgemeinerbar.

Weiterführende Literatur zu zeitabhängigen Lösungen der FPKE: H. Risken, *The FPE*, Springer Series in Synergetics, volume 18, 2<sup>nd</sup> Edition 1989, 3<sup>rd</sup> Printing 1996 (Berlin)

## 4. Elemente der Bifurkationstheorie stochastischer dynamischer Systeme

### 4.1 Bifurkationen in deterministischen dynamischen Systemen (Wdhlg.)

### 4.2 Bifurkationen in stochastischen dynamischen Systemen.

Wir können einem stochastischen dynamischen System asymptotisch (für  $t \rightarrow \infty$ ) eine stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $P^0$  zuordnen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\underline{x}, t; \underline{\mu}) = P^0(\underline{x}; \underline{\mu}), \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X^n, \quad \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)^T \in C^k,$$

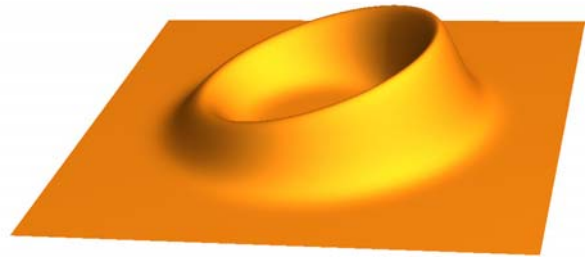
deren Eindeutigkeit (Unabhängigkeit von der Anfangsverteilung  $P(\underline{x}, t = t_0; \underline{\mu})$ ) durch das K-Theorem aus Kapitel (...) gesichert ist, wenn der Zustandsraum  $X^n$  unzerlegbar ist. Zum Bifurkationsnetz des stochastischen dynamischen Systems gehört die Menge  $K_s$  der Punkte des Parameterraums  $C^k$ , für  $P^0$  entartete singuläre Punkte besitzt

$$K_s = \left\{ \underline{\mu}_{cr} : \frac{\partial P^0(\underline{x}; \underline{\mu})}{\partial x_i} = 0, \det \left( \frac{\partial^2 P^0(\underline{x}; \underline{\mu})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0, i, j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (1)$$

Die entarteten singulären Punkte von  $P^0$  sind strukturell instabil und zerfallen bei Änderungen der Parameter  $\underline{\mu}$  in entartete singuläre Punkte niedrigerer Kodimension  $k$  und nichtentartete singuläre Punkte (Minima, Maxima, Sattelpunkte, usw., von  $P^0$ ) oder verschwinden. In der Umgebung von  $\underline{\mu}_{cr}$  kann sich insbesondere die Anzahl der lokalen Maxima von  $P^0$ , die sogenannte Modalität der stationären Wahrscheinlichkeitsdichte, bei Änderung von Parameterwerte verändern. Auf deterministischer Ebene entsprechen diese Änderungen lokalen Bifurkationen, die mit der Verschmelzung oder Entstehung von Fixpunkten einhergehen.

Aus der Bifurkationstheorie deterministischer dynamischer Systeme wissen wir, dass außer stabilen Fixpunkten andere Attraktoren wie stabile Grenzzyklen (für  $n \geq 2$ ) oder Tori und seltsame Attraktoren ( $n \geq 3$ ) auftreten können. Anhand von  $P^0$  allein lässt sich der Einfluss von Fluktuationen auf diese Attraktoren nicht analysieren.

Als Beispiel betrachten wir den abgebildeten "Wahrscheinlichkeitskrater" ( $n = 2$ ) (Dank an Jan Totz für die schöne Abbildung) mit einem lokalen Maximum, einem Minimum und einem Sattelpunkt.



Das entsprechende deterministische dynamische System kann einen stabilen Fixpunkt, einen instabilen Fixpunkt und einen Sattelpunkt besitzen. Die Kammlinie des Kraters beschreibt eine vom Sattelpunkt Richtung Maximum auslaufende und eine von zum Sattelpunkt zurücklaufende Separatrix.

Andererseits besitzt ein deterministisches dynamisches System mit einem instabilen Fixpunkt und einem stabilen Grenzzyklus auch die in der Abbildung gezeigte stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn sich der Phasenpunkt in der Umgebung des Minimums schneller als in der Umgebung des Maximums von  $P^0$  bewegt (das gilt für Relaxationsoszillationen). Der Kraterrand liegt jetzt über dem Grenzzyklus. Eine eindeutige Entscheidung zwischen den beiden Varianten können wir nur auf Basis des stationären Wahrscheinlichkeitsstroms  $\underline{G}^0(\underline{x}; \underline{\mu})$  treffen: Im ersten Fall ist  $\underline{G}^0(\underline{x}; \underline{\mu}) = 0$  für alle  $\underline{x} \in X^n$ , im zweiten Fall rotiert der stationäre Wahrscheinlichkeitsstrom.

Da für deterministische Gradientensysteme unter dem Einfluss isotropen additiven Rauschens

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V(\underline{x}, \underline{\mu})}{\partial x_i} + \sqrt{\sigma} \zeta_i(t), \quad \langle \zeta_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_i(t + \tau) \zeta_j(t) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau), \quad D = \sigma^2 = \text{const}$$

die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte gleich  $P^0(\underline{x}, \underline{\mu}) = N^{-1} \exp\left(-\frac{2}{D} V(\underline{x}, \underline{\mu})\right)$  ist,

fallen die lokalen Maxima (Minima) von  $P^0$  in diesem Fall mit den stabilen (instabilen) Fixpunkten der deterministischen Dynamik zusammen. Außerdem sind die  $K_S$  und  $K_D$  (ersetze in (1)  $P^0$  durch  $V$ ) identisch. Es treten bei deterministischer und stochastischer Betrachtung die gleiche Bifurkationen bei identischen Parameterwerten  $\underline{\mu}_{cr}$  auf.

R. Thom (und darauf aufbauend Arnold) hat gezeigt, dass die Singularitäten differenzierbarer Abbildungen  $X^n \otimes C^k \rightarrow \mathfrak{R}$  klassifiziert werden können. Angewendet auf die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $P^0$  (statt auf  $V$ ) folgt aus dem

Satz von Thom:

- (i) Die Menge der Singularitäten von  $P^0$  bildet eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$ .
- (ii) Für  $k \leq 4$  gibt es genau sieben verschiedene Singularitäten der senkrechten Projektion  $M \rightarrow C^k$ .
- (iii) In der Umgebung dieser Singularitäten ist  $P^0$  (topologisch  $\leftrightarrow$  diffeomorphe Abbildung) äquivalent zu

$$P^0(\underline{x}; \underline{\mu}) = UF(x_1, x_2) + \sum_{i=2}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2 \quad (2)$$

(nichtentartete quadratische Form in  $x_3, x_4, \dots, x_n$ ).

Die sogenannten universellen Entfaltungen  $UF(x_1, x_2)$  hat Thom berechnet, vgl. Tabelle.

**Universelle Entfaltungen für  $k \leq 4$**  (Notation:  $x_1 = x, x_2 = y$ )

k	n	singularity	universal unfolding	name
1	1	$x^3/3$	$x^3/3 + \mu_1 x$	fold (saddle-node)
2	1	$x^4/4$	$x^4/4 + \mu_1 x^2/2 + \mu_2 x$	cuspidal
3	1	$x^5/5$	$x^5/5 + \mu_1 x^3/3 + \mu_2 x^2/2 + \mu_3 x$	swallowtail
3	2	$x^3/3 + y^3/3$	$x^3/3 + y^3/3 + \mu_1 xy - \mu_2 x - \mu_3 y$	hyperbolic umbilic
3	2	$x^3/3 - xy^2$	$x^3/3 - xy^2 + \mu_1 (x^2 + y^2) - \mu_2 x - \mu_3 y$	elliptic umbilic
4	1	$x^6/6$	$x^6/6 + \mu_1 x^4/4 + \mu_2 x^3/3 + \mu_3 x^2/2 + \mu_4 x$	butterfly
4	2	$x^2y + y^4/4$	$x^2y + y^4/4 + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - \mu_3 x - \mu_4 y$	parabolic umbilic

Bemerkung: In deterministischen Gradientensystemen  $\frac{dx}{dt} = -\text{grad } V(\underline{x}; \underline{\mu})$  sind die universellen Entfaltungen „kanonische Formen“ in der Umgebung der entarteten Singularitäten des Potentials  $V$ . Thom identifizierte den vierdimensionalen Kontrollraum ( $k = 4$ ) mit Raum $\otimes$ Zeit und analysierte auf dieser Grundlage Frühphasen der Morphogenese. Es

gibt zahlreiche weitere (seriöse) Anwendungen, darunter in der Mechanik (Elastizitätstheorie, *buckling instabilities*) und der Optik (Übergang Strahlenoptik → Wellenoptik, Kaustiken, oszillatorische Integrale).

Weiterführende Literatur

- R. Thom, Structural stability and morphogenesis, Addison Wesley, 1989.
- J. Thompson, Instabilities and catastrophes in science and engineering, Wiley, 1982.
- T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications, Pitman, London, 1978 (Kapitel 9: The first seven catastrophe geometries).
- Th. Bröcker, L. Lander, Differentiable germs and catastrophes, Cambridge University Press, 1975. Kap. 17
- vgl. auch <http://zakuski.utsa.edu/~gokhman/ecz/c.html>: Populäre Einführung von E.C. Zeeman, Trinity University San Antonio, March 1995.

### 4.3 Eindimensionale stochastische dynamische Systeme mit multiplikativem Rauschen.

Die Ergebnisse für diesen Fall sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

makroskopisch/deterministisch	$\dot{x} = f(x; \mu) = h(x) + \mu g(x)$ <sup>1)</sup>
Fixpunkte $\hat{x}$ aus	$f(\hat{x}; \mu) = 0$
fluktuierender Parameter $\mu$ , $\tau_{\text{cor}} \ll \tau_{\text{det}}$	$\mu(t) = \mu + \sigma \zeta(t)$ , $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ , $\langle \zeta(t + \tau) \cdot \zeta(t) \rangle = \delta(\tau)$
Stratonovich-SDE	$\dot{x} = f(x; \mu) + \sigma g(x) \zeta(t)$ , $\mu := \langle \mu(t) \rangle$
äquivalente FPKE für $P(x, t; \mu)$	$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \cdot P + \frac{\sigma^2}{2} g \frac{\partial g}{\partial x} \cdot P - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 \cdot P) \right] = 0$
stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte	$P^0(x; \mu) = \frac{N^{-1}}{g(x)} \exp \left( \frac{2}{\sigma^2} \int^x dz \frac{f(z; \mu)}{g^2(z)} \right)$
lokale Extrema $\tilde{x}$ von $P^0(x; \mu)$ aus	$f(\tilde{x}; \mu) - \frac{\sigma^2}{2} g(\tilde{x}) \frac{dg}{dx} \Big _{\tilde{x}} = 0$

## Fallunterscheidung

$g(x) = \text{const} = 1$   $\rightarrow$  additives Rauschen:  $\tilde{x} = \hat{x}$ .

Die lokalen Extrema von  $P^0$  fallen mit den stationären Punkten der deterministischen Dynamik zusammen. Bifurkationen im deterministischen und stochastischen dynamischen System sind gleich und ereignen bei identischen Parameterwerten  $\mu_{cr}$ .

Im Fall koexistierender Attraktoren sind aber fluktuationsinduzierte Übergänge zwischen ihnen möglich! Diesen Fragen widmen wir uns im nächsten Kapitel.

$g(x) \neq \text{const}$   $\rightarrow$  multiplikatives Rauschen:  $\tilde{x} \neq \hat{x}$ .

Die lokalen Extrema von  $P^0$  sind gegen über den deterministischen Fixpunkte verschoben und zwar proportional zur Intensität der Fluktuationen  $\sigma^2$ . Die Anzahl der lokalen Maxima von  $P^0$ , also ihre Modalität, muss nicht mit der Zahl der stabilen Fixpunkte übereinstimmen. Lokale Maxima ohne deterministisches Pendant/Analogon werden als fluktuationsinduzierte Zustände bezeichnet ("fluktuationsinduzierte Stabilisierung makroskopischer Zustände").

Offensichtlich können sich auch deterministisches ( $K_D$ ) und stochastisches ( $K_S$ ) Bifurkationsnetz unterscheiden. Instabilitäten/Bifurkationen, die im deterministischen dynamischen System nicht auftreten, heißen ebenfalls fluktuationsinduziert.

Ursache dieser Effekte ist die multiplikative Kopplung zwischen nichtlinearer deterministischer Dynamik und Fluktuationen. Deren Intensität tritt als zusätzlicher Bifurkationsparameter auf. Auch andere Parameter der Fluktuationen, z.B. eine endliche Korrelationszeit, können Instabilitäten auslösen, die kein Pendant im deterministischen dynamischen System haben.



#### 4.4 Verhulst-Modell der Populationsdynamik mit fluktuierender Geburts-Sterberate

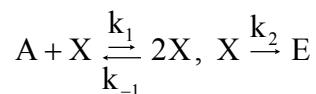
$f(x; \mu) = \mu \cdot x - x^2$ ,  $\mu(t)$  - Gauß'sches weißes Rauschen (wie in 4.3) (vgl. W. Horsthemke, M. Malek-Mansour, Z. Phys. **24**, 307 (1976))

Zur Motivation der Gleichung  $\dot{x} = \mu \cdot x - x^2$

1) Verhulst-Modell der Populationsdynamik: In diesem Fall ist  $x$  Dichte einer Population und  $\mu$  die Differenz aus Geburts- und Sterberate, die um einen zeitunabhängigen Mittelwert fluktuieren soll,  $\mu(t) = \mu + \sigma \zeta(t)$ . Der nichtlineare Term  $-x^2$  begrenzt das Wachstum der Population für positive  $\mu$ -Werte.

2) Das durch die Gleichung beschriebene Verhalten wird auch als logistisches Wachstum bezeichnet.

3) Die Gleichung beschreibt eine autokatalytische Reaktion mit Verzweigungsverhalten: Wandelt sich ein Ausgangsprodukt, A, entsprechend



über ein Zwischenprodukt, X, in ein Endprodukt, E, um, so lautet die Gleichung für die zeitliche Änderung der Konzentration,  $x(t)$ , von X nach den Regeln der chemischen Kinetik

$$\frac{dx}{dt} = k_1 a \cdot x - k_{-1} x^2 - k_2 x.$$

$k_i$  sind die kinetischen Koeffizienten. Der Ausgangsstoff A sei immer im Überfluss vorhanden, sodass sich seine Konzentration,  $a$ , praktisch nicht ändert. Nach Substitution  $t' = k_{-1} t$ ,  $k_{-1}$  und  $\mu := k_1 a - k_2$  reduziert sich die Gleichung auf die von uns betrachtete. Die Konzentration des Ausgangsstoffs A regelt die Stabilität des stationären Zustands  $x^0$ . F. Schlögl hat dieses Beispiel als Nichtgleichgewichtsphasenübergang II. Art aufgefasst (vgl. F. Schlögl, *Chemical Reaction Models for Non-Equilibrium Phase Transitions*, Z. Physik **253**, 147-161(1972); Kapitel 2)

Wir beginnen mit der deterministischen Dynamik  $\dot{x} = \mu \cdot x - x^2$ . (3)

Diese Differentialgleichung lässt sich sogar analytisch lösen ( $\mu \neq 0$ )

$$x(t) = \frac{x(0) e^{\mu t}}{1 + \mu^{-1} x(0) (e^{\mu t} - 1)}. \quad (4)$$

Die stationären Zustände  $\hat{x}$  sind

$$\hat{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 0, & \mu < 0 \\ \mu, & \mu \geq 0 \end{cases}; \quad (5)$$

sie stimmen natürlich mit den Nullstellen von  $f(x; \mu)$  überein,  $\mu \cdot \hat{x} - \hat{x}^2 = 0$ . Aus der linearen Stabilitätsanalyse ergibt sich sofort, dass  $\hat{x} = 0$  stabil für  $\mu < 0$  und  $\hat{x} = \mu$  stabil für  $\mu > 0$  ist (zeichne Abhängigkeit  $\hat{x}(\mu)$ ).

Für die stochastische Dynamik  $\dot{x} = \mu \cdot x - x^2 + \sigma x \zeta(t)$  (6)

finden wir nach kurzer Rechnung (Tabelle in 4.3) für die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P^0(x; \mu) = N^{-1} x^{\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)} e^{-\frac{2x}{\sigma^2}} \quad (7)$$

$$\text{und deren lokalen Extrema } \tilde{x} \text{ aus } -\tilde{x}^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tilde{x} = 0 \quad (8)$$

$$\tilde{x}_1 = 0 \text{ und } \tilde{x}_2 = \mu - \frac{\sigma^2}{2} > 0. \quad (9)$$

Die Momente  $\langle x^n \rangle = \int_0^\infty dx x^n P^0(x; \mu) = N^{-1} \int_0^\infty dx x^{\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1 + n} e^{-\frac{2x}{\sigma^2}}$  von  $P^0$  lassen sich über die

Gamma-Funktion  $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty dz z^{\alpha-1} e^{-z}$ ,  $\alpha > 0$ , reell,  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$  ausdrücken

$$n = 0: \quad N = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \Gamma\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}\right), \quad (10)$$

$$n = 1: \quad \langle x \rangle = \mu, \quad (\text{also das deterministische Resultat}) \quad (11)$$

$$n = 2: \quad \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \mu. \quad (12)$$

(PRÜFEN). Daraus ergibt sich folgendes Bild:

1)  $\mu \leq 0$

$P^0$  ist nicht normierbar. Wegen  $f(0) = g(0) = 0$  ist  $x = 0$  ein stabiler stationärer Punkt der SDE (6) (*attracting boundary*), der  $\mu = 0$  die Stabilität wechselt. Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $P^0$  ist  $\delta$ -funktionsartig in  $x = 0$  konzentriert.

2)  $0 < \mu \leq \frac{\sigma^2}{2}$

Bei  $\mu = 0$  wird  $x = 0$  (nun ein natürlicher Rand) instabil. Obwohl  $P^0$  immer noch bei  $x = 0$  divergiert, ist die Verteilung normierbar, besitzt jedoch kein Extremum. Es gilt

$$\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle} > \langle x \rangle, \text{ vgl. (11,12), d.h., in der Nähe des deterministischen}$$

Bifurkationspunktes  $\mu = 0$  dominieren die Fluktuationen über die deterministische Dynamik, erreichen praktisch makroskopisches Niveau („kritische Opaleszenz“). Das Aussterben der Population ist nicht gewiss, aber immer noch am wahrscheinlichsten.

3)  $\frac{\sigma^2}{2} < \mu$

$P^0$  besitzt ein Maximum bei  $\tilde{x} = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$  und der Erwartungswert der Verteilung ist nun

$$\text{größer als die mittleren quadratischen Abweichungen vom Erwartungswert, } \sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle} < \langle x \rangle .$$

Mit wachsendem Abstand vom deterministischen Bifurkationspunkt  $\mu = 0$  verlieren Fluktuationen immer mehr an Bedeutung und das deterministische Wachstum dominiert.

Schlußfolgerung: Die multiplikativen Fluktuationen des Parameters  $\mu(t)$  um  $\mu$  modifizieren das deterministische Bifurkationsdiagramm.

Bem.:  $\frac{\sigma^2}{2} = \mu$  kann man als Instabilität ohne deterministisches Analogon auffassen, wenn die

Bifurkation im deterministischen System dem Stabilitätswechsel des stationären Punkts der SDE (6) zugeordnet wird. Oder man interpretiert den deterministischen Übergang von Aussterben zu Wachstum der Population als proportional zur Intensität des Rauschens verschoben.

Eines der ersten experimentellen Beispiele für rauschinduzierte Übergänge haben P. de Kepper und W. Horsthemke in der lichtempfindlichen Briggs-Rauscher-Reaktion beschrieben (C.R. Acad. Sci. Paris (CII) **287**, 251 (1978); vgl. Kapitel 7.2 im Buch von Horsthemke/Lefever). Diese in homogener Lösung oszillierende Reaktion ist als Jod-Uhr bekannt.

Das einfallende Licht wurde durch einen turbulenten Luftstrom mit kleinen Polystyrol-Kügelchen gelenkt, bevor es auf den offenen Reaktor mit der Reaktanden ( $\text{KJIO}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}_2$ ,  $\text{HClO}_4$  und  $\text{MnSO}_4$ ) fiel. In einem bestimmten Bereich der Lichtintensität ist die Reaktion bistabil. Ein stationärer Zustand hoher  $\text{J}_2$ -Konzentration (violetter Jod-Stärke-Komplex) koexistiert (nichtüberlappend) mit Oszillationen von  $\text{J}_2$  auf einem niedrigeren Konzentrationsniveau (gelb). Die Übergänge zwischen beiden Ästen Zuständen konnten über die Fluktuationen der Lichtintensität (um den deterministischen Wert) proportional zu  $\sigma^2$  verschoben werden. Die "stochastische" Hysterese-Schleife war etwa doppelt so breit wie die "deterministische" und insgesamt zu kleineren Werten der (mittleren) Intensität verschoben.

#### 4.5 Gen-Selektion in fluktuierender Umgebung $\dot{x} = \alpha - x + \langle \mu \rangle x(1-x) + \sigma x(1-x)\zeta(t)$ (Übungsblatt/Übung)