

## 5. Übergangszeiten (*Escape from a metastable state*)

In diesem Kapitel befassen wir uns noch einmal mit der Zufallsbewegung im bistabilen Potenzial in Gegenwart von additivem Rauschen (vgl. Beispiel in Kap. 4). Im Mittelpunkt steht jetzt die fluktuationsinduzierte Überwindung der Potenzialbarriere zwischen den beiden Potenzialminima.

Befindet sich das Brownsche Teilchen in einem Potenzialminimum, kann es die Barriere unter Einfluss der stochastischen Stöße nach einer gewissen Zeit (stochastische Größe!) überwinden. Wir möchten wissen, wie lange ein solcher Übergang im Mittel dauert. Diese Zeit wird mittlere Übergangszeit oder *mean first passage time* genannt.

### 5.1 Gleichung für die mittlere Übergangszeit eines Markov-Prozesses

Zunächst formulieren wir das Problem allgemeiner und fragen, zu welchem Zeitpunkt  $t$  erreicht ein zu  $t_0$  an der Stelle  $x(t = t_0) =: x_0 \in [a, b]$  gestarteter eindimensionaler Markov-Prozess  $x(t)$  erstmalig einen der beiden Ränder des Intervalls  $a$  oder  $b$ ?

Sei  $p(x, t | x_0, t_0)$  die Wahrscheinlichkeit, die Realisierung  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  bei  $x$  zu finden, wenn sie sich zu  $t_0$  mit Sicherheit bei  $x_0$  befand. Um Realisierungen, die die Ränder  $a$  oder  $b$  erreicht haben, von der weiteren Betrachtung auszuschließen, setzen wir absorbierende Randbedingungen  $p(a, t | x_0, t_0) = 0$  und  $p(b, t | x_0, t_0) = 0$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zum Zeitpunkt  $t$  keiner der Ränder erreicht wurde ist

$$W(x_0, t) = \int_a^b dx \, p(x, t | x_0, t_0), \quad W(a, t) = W(b, t) = 0 \quad (1)$$

Zur Ableitung einer Gleichung für  $W$  gehen wir wieder von der Chapman-Kolmogorov-Gleichung aus

$$p(x, t | x_0, t_0 - \tau) = \int dx' \, p(x, t | x', t_0) p(x', t_0 | x_0, t_0 - \tau). \quad (2)$$

Der zweite Faktor unter dem Integral hängt für stationäre Markov-Prozesse nur von der Zeitdifferenz  $\tau$  ab, deshalb schreiben wir  $p(x', t_0 | x_0, t_0 - \tau) := w_\tau(x' | x_0)$ .

Für kleine  $\tau$  erwarten wir kleine Sprungweiten  $x'-x_0$ , also einen scharfen Peak von  $w_\tau(x'|x_0)$  bei  $x'=x_0$ . Deshalb können wir den ersten Faktor unter dem Integral in eine Taylor-Reihe nach  $x'$  an der Stelle  $x_0$  entwickeln

$$p(x, t|x', t_0) = p(x, t|x_0, t_0) + \left. \frac{\partial p}{\partial x'} \right|_{x'=x_0} (x'-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} \right|_{x'=x_0} (x'-x_0)^2 + \dots \quad (3)$$

Die partiellen Ableitung von  $p$  nach  $x'$  an der Stelle  $x_0$  hängen nicht mehr von  $x'$  ab und können vor das Integral gezogen werden. Mit den bei der Kramers-Moyal-Entwicklung bereits eingeführten Sprungmomenten

$$\int dx' (x'-x_0) w_\tau(x'|x_0) =: a_1(x_0) \cdot \tau \quad \text{und} \quad \int dx' (x'-x_0)^2 w_\tau(x'|x_0) =: a_2(x_0) \cdot \tau$$

erhalten wir aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p(x, t|x_0, t_0 - \tau) - p(x, t|x_0, t_0)}{\tau} &= \\ &= - \frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = a_1(x_0) \frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2} a_2(x_0) \frac{\partial^2 p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2}. \end{aligned}$$

Integration über  $x$  in  $[a, b]$  ergibt unter Verwendung von (1) und Ersetzung von  $t_0$  durch  $t$

$$\frac{\partial W(x_0, t)}{\partial t} = a_1(x_0) \frac{\partial W(x_0, t)}{\partial x_0} + \frac{1}{2} a_2(x_0) \frac{\partial^2 W(x_0, t)}{\partial x_0^2}, \quad W(a, t) = W(b, t) = 0, \quad (4)$$

Die Anfangsbedingung zu Gleichung (3) lautet  $W(x_0, t_0) = 1$ . Im folgenden setzen wir  $t_0 = 0$ .

$1 - W(x_0, t)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ränder  $a$  oder  $b$  im Zeitintervall  $(0, t)$  erstmalig erreicht werden. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte ist die der ersten Übergangszeit  $t_{fp}$

$$\frac{d}{dt} (1 - W(x_0, t)) \Delta t =: w(t_{fp}) \Delta t, \quad \text{also ist} \quad w(t_{fp}) = - \frac{dW}{dt}$$

Deshalb ist die mittlere Übergangszeit

$$T(x_0) := \int_0^{\infty} dt \, t \left( -\frac{\partial W}{\partial t} \right) = -W \cdot t \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dt \, W = \int_0^{\infty} dt \, W,$$

denn  $W(x_0, \infty) = 0$ , weil die Ränder  $a$  oder  $b$  für  $t \rightarrow \infty$  mit Sicherheit erreicht sind.

Integration von (4) über die Zeit  $t$  ergibt auf der linken Gleichungsseite

$$\int_0^{\infty} dt \, \frac{\partial W(x_0, t)}{\partial t} = W(x_0, \infty) - W(x_0, 0) = -1 \quad (\text{für } t = 0 \text{ ist mit Sicherheit kein Rand erreicht}),$$

also insgesamt

$$\underline{-1 = a_1(x) \frac{dT}{dx} + \frac{1}{2} a_2(x) \frac{d^2 T(x)}{dx^2}} \quad \text{mit} \quad \underline{T(a) = T(b) = 0}. \quad (5)$$

$T(x)$  ist die mittlere Übergangszeit, in der der stochastische Prozess bei  $x(t=0) = x \in [a, b]$

startend die Ränder  $a$  oder  $b$  erreicht. Für die höheren Momente  $T_n(x) := \int_0^{\infty} dt \, t^n \left( -\frac{\partial W}{\partial t} \right)$  der

Übergangszeit erhalten wir nach Multiplikation von (4) mit  $t^n$

$$\underline{T_n(x) := n \int_0^{\infty} dt \, t^{n-1} W(x, t)}, \quad \underline{-T_{n-1}(x) = a_1(x) \frac{dT_n}{dx} + \frac{1}{2} a_2(x) \frac{d^2 T_n(x)}{dx^2}}, \quad \underline{T_n(a) = T_n(b) = 0}, \quad (6)$$

wobei, wie in (5), wieder  $x(t=0) = x \in [a, b]$  anstelle von vorher  $x_0$  die Startposition bezeichnet.

Um die Gleichung (5)  $\frac{1}{2} a_2(x) T''(x) + a_1(x) T'(x) + 1 = 0$  zu lösen, setzen wir

$$\underline{T'(x) = F(x) e^{-q(x)}} \quad \text{und finden} \quad \underline{\frac{1}{2} a_2 (F' - Fq') e^{-q} + a_1 F e^{-q} + 1 = 0}. \quad \text{Für } q' = 2 \frac{a_1}{a_2}, \text{ also}$$

$$q(x) = 2 \int^x dz \, \frac{a_1(z)}{a_2(z)}, \quad \text{heben sich die Terme mit } F \text{ heraus und es verbleiben}$$

$$\frac{1}{2} a_2 F' e^{-q} = -1, \quad \text{also} \quad F'(x) = -\frac{2}{a_2(x)} e^{q(x)} \quad \text{bzw.} \quad F(x) = -2 \int_{c_2}^x dy \, \frac{e^{q(y)}}{a_2(y)}.$$

Unser Ansatz funktioniert und wir erhalten über

$$T'(x) = e^{-q(x)} F(x) = -2e^{-q(x)} \int_{C_2}^x dy \frac{e^{q(y)}}{a_2(y)} \text{ schließlich } T(x) = -2 \int_{C_1}^x dz e^{-q(z)} \int_{C_2}^z dy \frac{e^{q(y)}}{a_2(y)}.$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen wir aus den Randbedingungen

$T_n(a) = T_n(b) = 0$ . Im ersten Integral vertauschen wir noch die Integrationsgrenzen, dann ist

$$T(x) = 2 \int_x^b dz e^{-q(z)} \int_a^z dy \frac{e^{q(y)}}{a_2(y)} \quad \text{mit} \quad q(x) = 2 \int dx \frac{a_1(x)}{a_2(x)}. \quad (7)$$

die mittlere Zeit bis zum Erreichen der Ränder  $a, b$ .

Die Gleichung

$$-\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = a_1(x_0) \frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} + \frac{1}{2} a_2(x_0) \frac{\partial^2 p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} = \hat{L}_{\text{FPK}}^+ p(x, t|x_0, t_0)$$

wird manchmal Kolmogorov-Rückwärtsgleichung bezeichnet, im Gegensatz zu

$$\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [a_1(x) p(x, t|x_0, t_0)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_2(x) p(x, t|x_0, t_0)] =: \hat{L}_{\text{FPK}}^+ p(x, t|x_0, t_0), \quad (8)$$

der Kolmogorov-Vorwärtsgleichung.

Bemerkung: Die "Zweier-Übergangswahrscheinlichkeit"  $p(x, t|x_0, t_0)$  charakterisiert den Markov-Prozess vollständig. Sie genügt der CKE

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int dx' p(x, t|x', t') p(x', t'|x_0, t_0). \text{ Zwei Möglichkeiten:}$$

**a)** Fixiere  $x_0$  zu  $t_0$  und untersuche die zeitliche Entwicklung von  $p$ , wenn  $x$  sich für  $t > 0$  ändert. In diesem Fall führt die Kramers-Moyal-Entwicklung auf

$$\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x, t) p(x, t|x_0, t_0)] \quad \rightarrow \quad \text{Vorwärtsgleichung}$$

und für  $a_n = 0$ , ab  $n \geq 3$  zur FPKE. (Beachte Satz von Pawula).

b) Fixiere  $x$  und  $t$  und frage nach dem variablen Anfangszustand  $x_0, t_0$ . Dann ist die Zeitdifferenz  $t - t_0$  berechenbar, die der stochastische Prozess benötigt, um bei  $x_0$  startend den fixierten Wert  $x$  zu erreichen. Diese "Rückwärtsentwicklung" führt auf

$$-\frac{\partial p(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_n(x, t) \frac{\partial^n p(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0^n} \rightarrow \text{Rückwärtsgleichung} \quad (8)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sich Gleichung (5) in der Form  $\hat{L}_{\text{FPK}}^+ T(x) = -1$  schreiben lässt, wobei  $\hat{L}_{\text{FPK}}^+$  der zu  $\hat{L}_{\text{FPK}}$  adjungierte Operator ist. Wir haben also

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = L_{\text{FPK}} P(x, t) \quad \text{und} \quad \hat{L}_{\text{FPK}}^+ T(x) = -1, \quad T(a) = T(b) = 0$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. die mittlere Übergangszeit.

## 5.2 Fluktuationsinduzierte Überwindung einer Potenzialbarriere $\Delta U$

Nun wenden wir das Ergebnis auf die überdämpfte Bewegung eines Brown'sches Teilchen unter dem Einfluss stochastischer Stöße  $\zeta(t)$  entsprechend

$$\gamma \frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx} + \zeta(t), \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t + \tau) \zeta(t) \rangle = 2D \delta(\tau), \quad D = \text{const} \quad (9)$$

an. Die beiden Potenzialminima mögen bei  $x = a$  und  $x = c$  liegen, das lokale Maximum des Potentials bei  $x = b$ , mit  $a < b < c$ . Wir haben in (9) den Trägheits- gegen den Reibungsterm vernachlässigt (überdämpfte Bewegung). Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir ab jetzt den Reibungskoeffizienten  $\gamma$  gleich Eins und bezeichnen die Intensität der stochastischen Stöße mit  $2D$ .

Befindet sich das Brownsche Teilchen im linken Potenzialminimum, kann es die Barriere unter Einfluss der stochastischen Stöße mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit überwinden. Wir möchten wissen, wie lange die Überwindung der Potenzialbarriere im Mittel dauert.

Die FPKE zu (9) lautet  $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(U'P) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$  mit  $P^0(x) = N^{-1} \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right]$ .

Also ist  $a_1(x) = -\frac{dU}{dx}$  und  $a_2(x) = 2D$ .

Starten wir in  $x$  aus dem Intervall  $-\infty < x < b$ , verschieben also den linken Rand  $a$  nach  $-\infty$ , so folgt aus (7) für die mittlere Übergangszeit

$$T(x) = \frac{1}{D} \int_x^c dz e^{\frac{U(z)}{D}} \int_{-\infty}^z dy e^{-\frac{U(y)}{D}} \quad (10)$$

Der erste Faktor enthält den Punkt  $b$ , der zweite den Punkt  $a$ .

Für schwaches Rauschen können beide Integrale in Sattelpunktsapproximation berechnet werden. Je kleiner  $D$  ist, desto stärker ist der Wert des Integrals über  $z$  durch die Umgebung des Maximums  $b$  dominiert

$$\int_x^c dz e^{\frac{U(z)}{D}} \approx e^{\frac{U(b)}{D}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{|U''(b)|}{2D}(z-b)^2} = e^{\frac{U(b)}{D}} \sqrt{\frac{2\pi D}{|U''(b)|}}, \quad U''(b) < 0.$$

Analog rühren die Hauptbeiträge zum Integral über  $dy$  aus der Umgebung des Minimums  $a$

$$\int_{-\infty}^z dy e^{-\frac{U(y)}{D}} \approx e^{-\frac{U(a)}{D}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{U''(a)}{2D}(y-a)^2} = e^{-\frac{U(a)}{D}} \sqrt{\frac{2\pi D}{U''(a)}}, \quad U''(a) > 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$T(a \rightarrow c) \approx \frac{2\pi}{\sqrt{|U''(b)U''(a)|}} e^{\frac{\Delta U}{D}} \quad \text{mit} \quad \underline{\Delta U := U(b) - U(a) > 0} \quad . \quad (11)$$

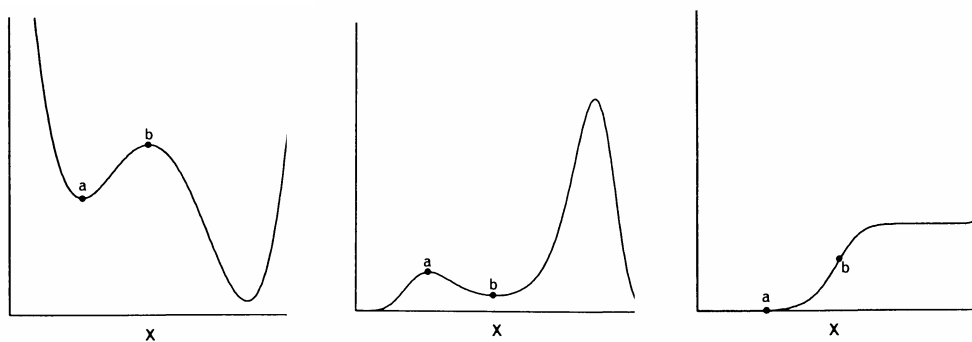
Interpretation: Die mittlere Übergangszeit wächst exponentiell mit der Höhe der Potenzialbarriere  $\Delta U$ . Die Vorfaktoren widerspiegeln den Einfluss der Geometrie von  $U(x)$  in der Umgebung von  $a$  und  $b$ : Eine breite, flache Barriere (kleine Werte von  $|U''(b)|$ ) ist schwerer zu überwinden als eine schmale Barriere gleicher Höhe. Je flacher die Potenzialmulde um  $a$ , desto kleiner ist  $U''(a)$  und desto größer  $T(a \rightarrow c)$ .

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist  $\frac{D}{\gamma} = k_B T$  und für die Übergangsrate  $r$  folgt

$$r \sim \frac{1}{T} \approx e^{-\frac{\Delta U}{D}} = e^{-\frac{\Delta U}{k_B T}} \quad (\text{Kramers, 1940}). \quad (12)$$

In der Reaktionskinetik ist (12) das Arrhenius'sches Gesetz der Temperaturabhängigkeit kinetischer Koeffizienten.

Die Abbildungen illustrieren die Verläufe von  $U(x)$ ,  $P^0(x)$  und  $T(a \rightarrow x)$  (Quelle: Gardiner, S. 140).



Weiterführende Literatur: P. Hänggi, P. Talkner, Borkovec, Reaction Rate Theory, Rev. Mod. Phys. **62**, N° 2(1990).

### 5.3 Lösung der Fokker-Planck-Kolmogorov Gleichung durch Entwicklung nach Eigenfunktionen. Äquivalente Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \hat{L}_{\text{FPK}} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P(x,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) \quad (13)$$

Für die Eigenfunktionen  $\Phi_n(x)$  des Operators  $\hat{L}_{\text{FPK}}$  entsprechend

$$P(x,t) = \sum_n c_n \Phi_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (14)$$

$$\text{folgt } U''\Phi_n + U'\Phi_n' + D\Phi_n'' = -\lambda_n \Phi_n. \quad (15)$$

Aus Symmetriegründen besitzt  $\hat{L}_{\text{FPK}}$  den Eigenwert  $\lambda_0 = 0$ . Die zugehörige Eigenfunktion (Goldstone-Mode) ist die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $P^0(x)$ . Die Substitution

$\Phi_n(x) = e^{-\frac{U(x)}{2D}} \psi_n(x)$  eliminiert den Term  $U'\Phi_n'$  in der Gleichung für  $\Phi_n$ . Nach kurzer

Rechnung folgt  $\frac{U''}{2}\psi_n - \frac{U'^2}{4D}\psi_n + D\psi_n'' = -\lambda_n \psi_n$ . Diese Gleichung ist zu einer

Schrödinger-Gleichung  $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_n'' + V\psi_n = E_n\psi_n$  für die eindimensionale Bewegung in  $V(x)$

äquivalent, wenn gilt

$$\frac{2m}{\hbar^2} V(x) = \frac{U'^2(x)}{4D^2} - \frac{U''(x)}{2D} \quad \text{und} \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mD} \lambda_n. \quad (16)$$

■ Beispiel:  $U(x) = -\frac{k}{2}x^2 + \frac{x^4}{4} = U(-x), \quad k > 0$

NR:  $U' = -kx + x^3, \quad U'^2 = x^2(x^2 - k)^2, \quad U'' = -k + 3x^2,$

$$\underline{\underline{V(x)}} = \frac{U'^2}{4D^2} - \frac{U''}{2D} = \frac{x^2(x^2 - k)^2}{4D^2} - \frac{-k + 3x^2}{2D} = \frac{x^6 - 2kx^4 + k^2x^2 - 6Dx^2 + 2Dk}{4D^2} = \underline{\underline{V(-x)}}.$$



Solange  $k^2 < 6D$ , ist  $V(x)$  ebenfalls bistabil. Also sind die Eigenwerte des äquivalenten Schrödinger-Problems nicht entartet (1d), die Wellenfunktionen sind entweder symmetrisch oder antisymmetrisch, für sie gilt der Knotensatz. Die lokalen Extrema des äquivalenten Schrödinger-Potenzials  $V(x)$  liegen bei  $x = 0$  und  $3x^4 - kx^2 + k^2 - 6D = 0$ ,

also Maximum bei  $x = 0$  und Minima bei  $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}k + \sqrt{\frac{k^2}{9} + 2D}}$ .

Ist die Potenzialbarriere  $\Delta U$  zwischen den beiden Minima hinreichend groß, dann ist  $\lambda_1$  sehr klein. In der Umgebung von  $x = b$  ist auch  $\Phi_0(x)$  klein. Da  $\Phi_1(x)$  im Punkt  $b$  einen Knoten haben muss, gilt

$\Phi_1(x) \sim \Phi_0(x)$ ,  $x > b$  und  $\Phi_1(x) \sim -\Phi_0(x)$ ,  $x < b$ .  $\lambda_2$  ist deutlich größer als  $\lambda_1$ , da  $\Phi_2(x)$  Knoten in beiden Potenzialmulden besitzt und sich deshalb wesentlich von  $\Phi_1(x)$  unterscheiden muss. In der Summe (14) wird der Term zu  $n = 1$  langsam (auf der Zeitskala  $1/\lambda_1$ ) ausgedämpft. Wir setzen für  $x > b$

$$\Phi_1(x) = c \cdot \Phi_0(x) [1 + \lambda_1 g(x)] \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda_1 \ll 1 \quad \text{und} \quad g(x \rightarrow \infty) = 0 \quad (17)$$

(15) für  $n = 1$  gibt  $U''c\Phi_0(1 + \lambda_1 g) + U'c\Phi_0'(1 + \lambda_1 g) + U'c\Phi_0\lambda_1 g' + D \cdot \{\Phi_0(x)[1 + \lambda_1 g(x)]\}'' \dots$

und in linearer Ordnung des kleinen Parameters  $\lambda_1$  für  $g(x)$  die Differentialgleichung

$$\left( \frac{d}{dx} U' + D \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi_0 g = -\Phi_0.$$

Wegen  $\left( \frac{d}{dx} U' + D \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi_0 = 0$  (FPKE für  $P^0$ ) genügt  $g(x)$  der Gleichung für die mittlere

Übergangszeit  $\left( \frac{d}{dx} U' + D \frac{d^2}{dx^2} \right) g(x) = -1$ , deren Lösung wir bereits kennen. Unter

Berücksichtigung der Randbedingung  $g(x \rightarrow \infty) = 0$  finden wir

$$g(x) = -\frac{1}{D} \int_x^\infty dz e^{\frac{U(z)}{D}} \int_z^\infty dy e^{-\frac{U(y)}{D}}.$$

Aus  $g(x)$  ergibt sich  $\Phi_1(x)$  (15). Der Kehrwert des Eigenwerts  $\lambda_1$  hängt mit der mittleren Übergangszeit  $t_{\text{mfpt}}$  zusammen,  $\lambda_1^{-1} = 2t_{\text{mfpt}}$ .

**Fazit:** Folgendes Bild der zeitlichen Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x,t)$  gemäß (14), wenn  $P(x,t)$  anfänglich in der Nähe der Barriere  $x = b$  lokalisiert ist:

1. Phase: Die Verteilung verbreitert sich rasch, Überwindung der Barriere in beiden Richtungen.

2. Phase: Aufbau lokaler Verteilungen  $P_a(t) := \int_{-\infty}^b dx P(x,t)$  und  $P_c(t) := \int_b^{\infty} dx P(x,t)$ ,

die in der Nähe der beiden Minima  $x = a$  bzw.  $x = c$  von  $U(x)$  lokalisiert sind.

3. Phase: Auf Zeitskalen von der Größemordnung der mittleren Übergangszeit wird Wahrscheinlichkeit zwischen den beiden Minima hin- und herbewegt.  $P_a(t)$  und  $P_c(t)$  ändern sich langsam gemäß

$$\frac{\partial P_a}{\partial t} = -\frac{\partial P_c}{\partial t} = -\frac{P_a}{\tau_{a \rightarrow c}} + \frac{P_c}{\tau_{c \rightarrow a}}.$$

In symmetrischen bistabilen Potenzialen ist  $\tau_{a \rightarrow c} = \tau_{c \rightarrow a} = (2\lambda_1)^{-1}$ .