

Stochastische Modellierung der Musterbildung in Verkehrsströmen

Jakopo Zurbuch, Armin Pournaki, Tobias Hülser

July 20, 2018

Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird ein mikroskopischer Ansatz zur Beschreibung von Stau vorgestellt und mithilfe von Methoden aus der Vorlesung zur Statistischen Physik im Nichtgleichgewicht hergeleitet. Zudem wird eine Simulation basierend auf dem Cellular-Automata-Modell gezeigt, die die hergeleiteten Ergebnisse reproduziert.

1 Einleitung

Das wissenschaftliche Interesse für Verkehrsdynamik wächst seit den 50er Jahren immer weiter an [1]. Eine mathematische Beschreibung der zugrundeliegenden Prozesse wurde mit dem Wachstum von Metropolen immer notwendiger, um der Explosion des Autoverkehrs mit stauhindernden Eingriffen entgegenwirken zu können. Grundlegend ist hierbei die Bestimmung von sog. Fundamentaldiagrammen, welche den Fluss des Autostroms (#Autos/s) über der Dichte (#Autos/m) auftragen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Einblick in ein Modell zur Staumodellierung zu geben. Es werden Methoden aus der Vorlesung benutzt, um die Dynamik des Systems mithilfe von Master-Gleichungen zu beschreiben. Im Anschluss wird ein Cellular Automata Modell simuliert, um einen numerischen Vergleich mit den analytischen Ergebnissen zu erhalten. Zuletzt wird ein Ausblick auf weitere Anwendungsbereiche ähnlicher Modelle gegeben.

2 Stau auf dem Kreis

Der Einfachheit halber betrachten wir ein Modell auf dem Kreis mit Länge L mit der Annahme, dass immer nur genau ein Stau mit n Autos existiert. In der Regel können natürlich mehrere Staus gleichzeitig auf dem Kreis existieren. Die zugehörige Master-Gleichung lautet [2]:

$$\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = \omega_+(n-1)p(n-1,t) + \omega_-(n+1)p(n+1,t) - (\omega_+(n) + \omega_-(n))p(n,t) \quad (1)$$

wobei $\omega_+(n)$ die Übergangsrate ist, dass ein Auto dem Cluster mit Größe n hinzugefügt wird, und entsprechend ω_- die Übergangsrate, dass ein Auto sich aus dem Cluster entfernt. $P(n,t)$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass zum Zeitpunkt t , ein Cluster aus n Autos auf dem Kreis existiert. Um ω_+ und ω_- bekommt man in der Regel aus speziellen Annahmen für das Modell. Wir machen die Annahme, dass jeder Fahrer eine Reaktionszeit τ aufweist, sodass bei dem ersten Auto im Cluster, der Fahrer diese Zeit braucht um sich aus dem Cluster zu entfernen, wenn vor ihm die Straße frei wird. Je kleiner die Reaktionszeit, desto Wahrscheinlicher ist also, dass ein Auto sich aus dem Cluster entfernt, womit $\omega_- = \frac{1}{\tau}$ begründet ist. Eine zusätzliche sinnvolle Annahme ist, dass jedes Auto eine Maximalgeschwindigkeit v_{max} besitzt, jedes Autos aber eine Optimalgeschwindigkeit v_{opt} aufweisen sollte, die in Abhängigkeit von dem Abstand benachbarter Autos Δx ist. Wenn der Abstand Δx gegen unendlich geht, sollte v_{opt} gegen v_{max} gehen und wenn Δx gegen 0 geht, sollte v_{opt} gegen 0 gehen, da wir einen Zusammenstoß von Autos hier nicht berücksichtigen wollen. Eine Möglichkeit für die Optimalgeschwindigkeit wäre also

$$v_{opt} = v_{max} \frac{(\Delta x)^2}{D^2 + (\Delta x)^2} \quad (2)$$

Wenn ein Auto mit Abstand Δx_{free} im "free flow" sich dem fest definierten Abstand Δx_{clust} nähert, dann gehen wir davon aus, dass $v_{opt}(\Delta x_{free})$ sich $v_{opt}(\Delta x_{clust})$ nähert. Es werden also nur zwei Abstände Δx_{free} in Abhängigkeit von der Cluster Größe und das feste Δx_{clust} auf der Fahrbahn berücksichtigt, womit wir in der Lage sind, die Übergangsrate ω_+ als

$$\omega_+(n) = \frac{v_{opt}(\Delta x_{free}(n)) - v_{opt}(\Delta x_{clust})}{\Delta x_{free}(n) - \Delta x_{clust}} \quad (3)$$

zu schreiben. Der clusterabhängige Abstand $\Delta x_{free}(n)$ lässt sich mit Hilfe der Bedingung $L = ln + \Delta x_{clust}(n-1) + l(N-n) + \Delta x_{free}(N-n+1)$ als

$$\Delta x_{free}(n) = \frac{L - lN - \Delta x_{clust}(n-1)}{N - n + 1} \quad n \geq 1 \quad (4)$$

schreiben, wobei l die feste Autolänge und N die Gesamtzahl an Autos auf dem Kreis ist. Zusätzlich müssen wir fordern, dass $\omega_+(N) = \omega_-(0) = 0$, da bei einem Cluster mit n Autos kein Auto mehr dazu kommen kann und bei keinem Cluster sich auch kein Auto entfernen kann. Der Übergang für keinen Cluster $n = 0$ (free flow) zu einem Precluster $n = 1$ kann nur stattfinden, wenn der "free flow" gestört wird, wir machen also den Ansatz $\omega_+(0) = \frac{\zeta N}{\tau}$, wobei ζ die Intensität der

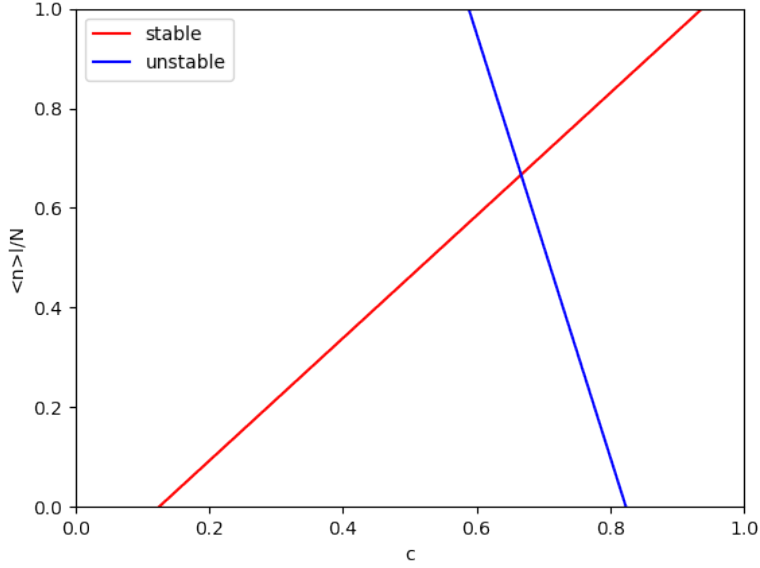


Abb. 1: Erwartungswert für die Parameter $L = 5000, \tau = 0.5, l = 4, v_{max} = 120, \zeta = 0.001, dy_{clust} = 0.5$. Ab einer bestimmten Dichte (≈ 0.15) existieren stabile stationäre Lösungen (roter Zweig) und (≈ 0.6) instabile Lösungen (blauer Zweig).

stochastischen Störung beschreibt. Wir können das ganze auch dimensionslos schreiben, indem wir alle Längen durch die Autolänge l teilen, also z.B. $\Delta y_{free} = \frac{\Delta x_{free}}{l}$ und $\tilde{v}_{opt} = \frac{v_{opt}}{v_{max}}$, $T = \frac{t}{\tau}$ setzen. Das System, das wir betrachten hat also die Form.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \frac{\partial p(n, T)}{\partial T} &= \omega_+(n-1)p(n-1, T) + \omega_-(n+1)p(n+1, T) - (\omega_+(n) + \omega_-(n))p(n, T) \\ \tilde{v}_{opt} &= \frac{(\Delta y)^2}{\left(\frac{D}{l}\right)^2 + (\Delta y)^2} \\ \omega_- &= \frac{1}{\tau} \\ \omega_+(0) &= \frac{\zeta N}{\tau} \\ \omega_+(n) &= \frac{v_{max}}{l} \frac{\tilde{v}_{opt}(\Delta y_{free}(n) - \tilde{v}_{opt}(\Delta y_{clust}))}{\Delta y_{free} - \Delta y_{clust}} \end{aligned}$$

Bei Multiplikation der Mastergleichung mit n und Summierung über alle n ergibt

$$\frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle n \rangle = \langle \omega_+(n) \rangle - \langle \omega_-(n) \rangle \quad (6)$$

was genähert als eine deterministische gewöhnliche dgl geschrieben werden kann

$$\frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle n \rangle = \omega_+(\langle n \rangle) - \omega_-(\langle n \rangle) \quad (7)$$

der Stationäre Zustand des Erwartungswert muss also der Gleichung $\omega_+(\langle n \rangle) = \frac{1}{\tau}$ erfüllen. Diese Gleichung besitzt maximal zwei Lösungen in Abhängigkeit von den Parametern. Wir betrachten hier Lösungen in Abhängigkeit von der Dichte $c = \frac{lN}{L}$, wobei die anderen Parameter fest sind. Kommen wir nun zur Master Gleichung (1)[3]. Diese kann auch in der einfacheren Form

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = WP(n, t) \quad (8)$$

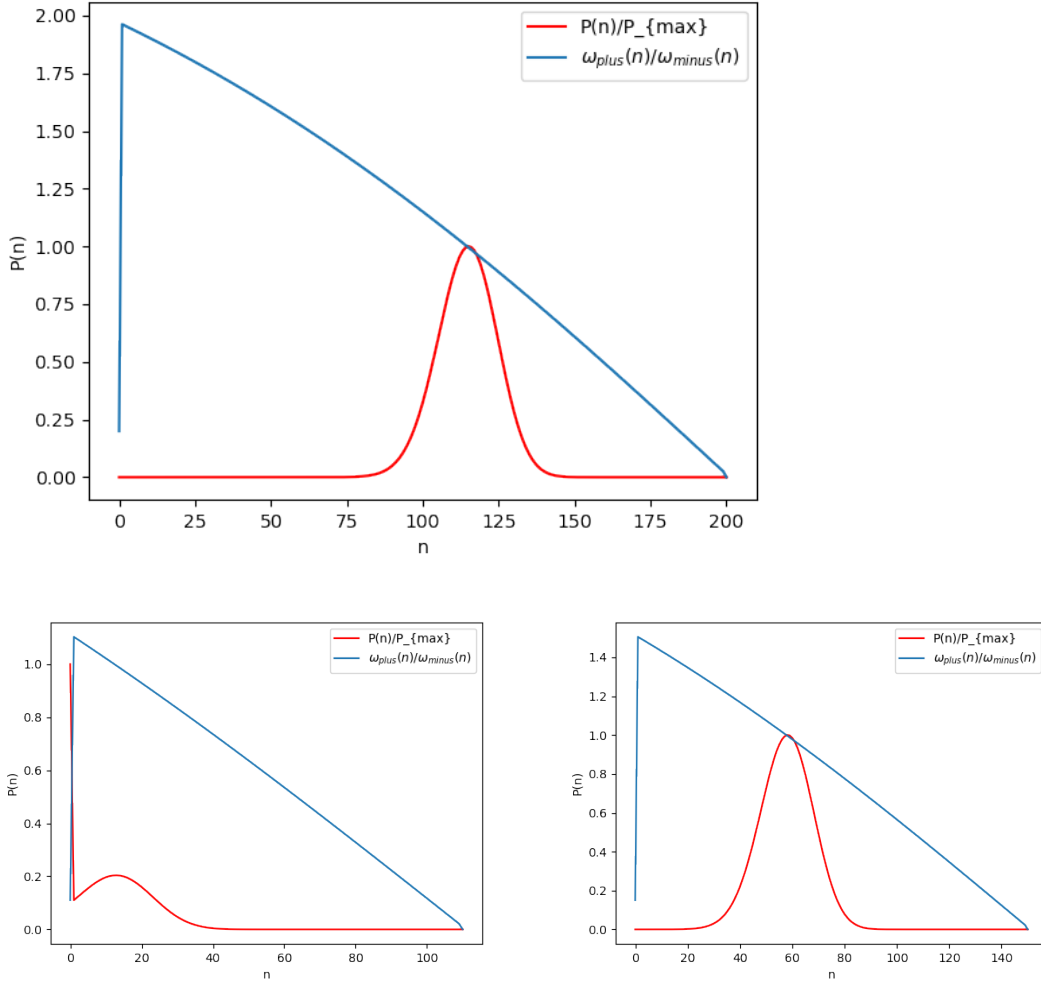


Abb. 2: Stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung(rot) für $N = 200$ (oben), $N = 110$ (unten links), $N = 150$ (unten rechts). Die parameter sind $L = 5000, \tau = 0.4, v_{max} = 120, l = 4, p = 0.001, dy_{clust} = 0.5$. Die blaue Kurve zeigt das Verhältnis von $\frac{\omega_{plus}}{\omega_{minus}}$, Das Maximum der Verteilung von P liegt dort, wo das Verhältnis gleich eins ist, was der Stationäre Zustand für den Erwartungswert ist.

geschrieben werden, wobei W die Übergangsmatrix mit den Eigenschaften $W(n, n') \geq 0$ für $n \neq n'$ und $\sum_n W(n, n') = 0$ (Bedingung für Normierung) Wir können die Lösung Formel als $P(t) = \exp(Wt)P(0)$ wobei $\exp(Wt) = \sum_{n \geq 0} \frac{(Wt)^n}{n!}$. Die Matrix W hat im allgemeinen immer mindestens einen Eigenwert der identisch Null ist und der zugehörige Eigenvektor ist gerade der Stationäre Zustand P_{st} , womit die Existenz gesichert ist. Zusätzlich gilt, dass alle anderen Eigenwerte den Realteil kleiner gleich Null haben. Unter bestimmten Umständen, wie in isolierten Systemen, existiert zusätzlich die Eigenschaft, dass für die Zustände n und n' die Übergangsraten gleich werden, also $W(n, n')p(n') = W(n', n)p(n)$. Diese Eigenschaft garantiert die Diagonalisierbarkeit der Matrix W und somit auch die Darstellung von $P(t)$ als superposition der Eigenvektoren mit den zugehörigen Eigenwerten von W .

$$P(t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} U_{\lambda} \exp(\lambda t) \quad (9)$$

wobei u_{λ} der Eigenvektor zum Eigenwert λ ist und $c_{\lambda} = (U_{\lambda})^T P(0)$.

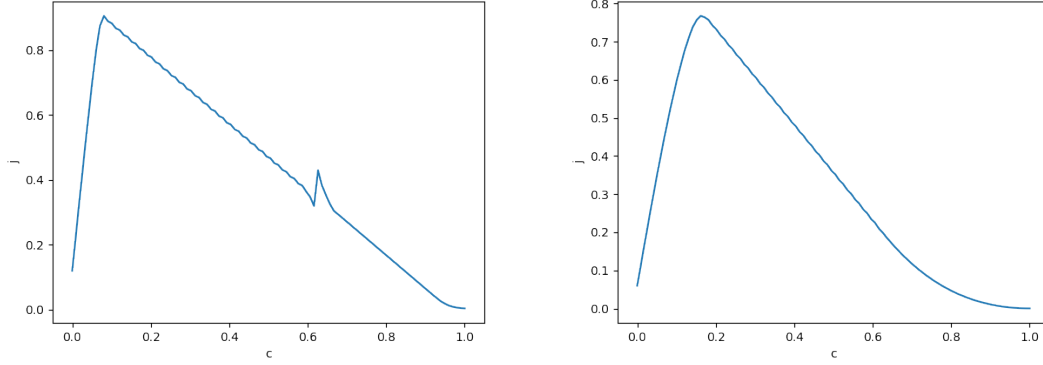


Abb. 3: Fundamentaldiagramm mit $\tau = 0.4$ (links) und $\tau = 0.2$ (rechts), $L = 5000$, $v_{max} = 120$, $l = 4$, $p = 0.001$, $dy_{clust} = 0.5$

Ein weiter wichtiger Punkt ist das Fundamentaldiagramm [2], was die Abhängigkeit des Flusses J über die Dichte c zeigt. Der Fluss J wird mit Hilfe der lokalen Dichte ϱ und der lokalen Geschwindigkeit v definiert als

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varrho(x, t') v(x, t') dt' \quad (10)$$

oder auch dimensionslos als $j = J\tau$. Da wir in unserem Modell nicht die deterministische Gleichung der Orte und Geschwindigkeiten der Autos betrachten, sondern die zugehörige Mastergleichung müssen wir den Fluss mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(n)$ beschreiben. Da wir in unserem Modell nur zwei Dichten $\varrho_{clust} = \frac{c_{clust}}{l}$ und $\varrho_{free} = \frac{c_{free}}{l}$ und die zugehörige optimal Geschwindigkeit haben, schreiben wir (10) als

$$j = \frac{v_{max}\tau}{l} \sum_n P(n) \left(\omega_{opt}(\Delta y_{clust}) \frac{nl}{L} + \omega_{opt}(\Delta y_{free}(n)) \left(c - \frac{nl}{L} \right) \right) \quad (11)$$

Potenzialdarstellung

Wir betrachten nun das Problem als Ein-Schritt-Prozess, in welchem die Übergangsraten zwischen benachbarten Zuständen n und $n' = n \pm 1$ definiert als

$$\begin{aligned} \omega(n, n-1) &= \omega_+(n-1) \\ \omega(n, n+1) &= \omega_-(n+1) \\ \omega(n+1, n) &= \omega_+(n) \\ \omega(n-1, n) &= \omega_-(n) \end{aligned}$$

Somit wird die Mastergleichung zu:

$$\frac{dp(n, t)}{dt} = w_+(n-1)p(n-1, t) + w_-(n+1)p(n+1, t) - [w_+(n) + w_-(n)]p(n, t) \quad (12)$$

Die Gleichung gilt allerdings nicht am Rand $n = 0$ und $n = N$, weshalb folgende Randbedingungen notwendig sind:

$$\begin{aligned} \frac{dp(0, t)}{dt} &= w_-(1)p(1, t) - w_+(0)p(0, t) \\ \frac{dp(N, t)}{dt} &= w_+(N-1)p(N-1, t) - w_-(N)p(N, t) \end{aligned} \quad (13)$$

Um Gleichung X zu lösen, schreiben wir sie als Balancegleichung um:

$$\frac{dp(n, t)}{dt} = J(n+1, t) - J(n, t) \quad (14)$$

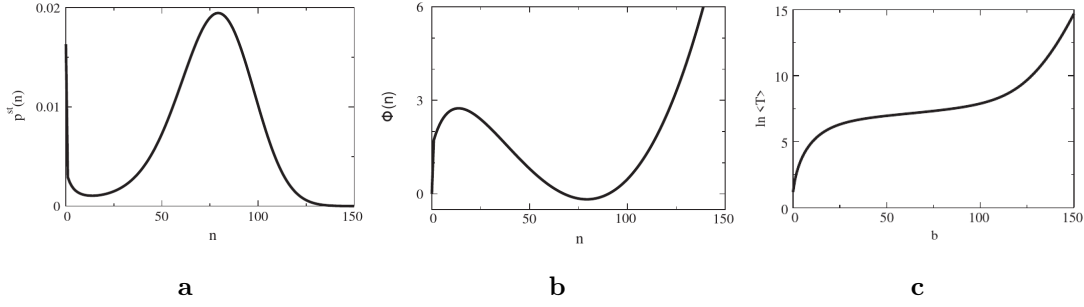


Abb. 4: Beispiel für eine bistabile stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{st}(n)$ (a) und das zugehörige Potenzial $\phi(n)$ (b). Die zugehörige mean first passage time ist in logarithmisch in Abhängigkeit von $b = n + 1$ aufgetragen (c). Das System benötigt also im Mittel die Zeit $\langle T \rangle$, um vom Grundzustand $n = 0$ in den Zustand b zu gelangen. Abbildungen entnommen aus [2]

wobei der Wahrscheinlichkeitsfluss wie folgt definiert ist:

$$J(n, t) = w_-(n)p(n, t) - w_+(n-1)p(n-1, t) \quad (15)$$

Im stationären Zustand sind die Wahrscheinlichkeitsflüsse nicht mehr zeitabhängig, somit folgt $J(n+1) = J(n) = J$.

In endlichen Systemen mit $n = 0, 1, 2, \dots, N$ existiert ein stationärer Zustand, in dem $J = 0$ und somit die detaillierte Balance gilt. Deshalb kann man die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte p^{st} über eine Folge definieren:

$$p^{st}(n) = \frac{w_+(n-1)}{w_-(n)} p^{st}(n-1) \quad (16)$$

$$p^{st}(n) = p^{st}(0) \prod_{m=1}^n \frac{w_+(m-1)}{w_-(m)} \quad (17)$$

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte muss normiert werden, um schließlich auf die Formel X zu kommen:

$$\sum_{n=0}^N p^{st}(n) = 1 \quad (18)$$

$$p^{st}(n) = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1}^n (w_+(m-1)/w_-(m))}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{m=1}^k (w_+(m-1)/w_-(m))}, & n = 1, 2, \\ \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{m=1}^k (w_+(m-1)/w_-(m))}, & n = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Man kann Gleichung X in Exponentialform schreiben

$$p^{st}(n) = p^{st}(0) \exp\{-\Phi(n)\} \quad (20)$$

in welcher die Funktion

$$\Phi(n) = \sum_{m=1}^n \ln \left(\frac{w_-(m)}{w_+(m-1)} \right) \quad (21)$$

als Analogie zu physikalischen Systemen als Potenzial gilt.

Oft ist es interessant, zu wissen, wie lange ein Teilchen unter Einfluss von Fluktuationen braucht, um in einen stabilen Fixpunkt zu gelangen. Hierfür wird die mean first passage time herangezogen. Die Herleitung, ausgehend von der zugehörigen Chapman-Kolmogorov-Gleichung, finden Sie in [2][S.15]. Abbildung 4 (c) zeigt die mean first passage time $\langle T \rangle$ in Abhängigkeit von $b = n + 1$.

3 Cellular Automata

Cellular-Automata-Modelle für Verkehrsströme wurden zunächst wegen ihrer Vorteile hinsichtlich Rechengeschwindigkeit eingeführt [4]. In Cellular-Automata-Modellen wird der (hier eindimensionale) Raum in Zellen der Länge Δx eingeteilt. Jede Zelle ist dabei mit maximal einem Auto besetzt. Zusätzlich wird die Zeit diskretisiert. Für Verkehrsströme (Pkw bzw. Lkw) wird hierbei der Reaktionszeit entsprechend in der Regel $\Delta t = 1s$ gewählt. Da sowohl Ort, als auch Zeit diskretisiert sind, kann auch die Geschwindigkeit nur diskrete Werte $v \in \{0, 1, \dots, v_{max}\}$ annehmen, welche sich als Vielfache von $\Delta x/\Delta t$ ergeben. Die Dynamik wird nun beschrieben durch bestimmte Regeln, durch welche die Geschwindigkeiten v_i^{neu} und Orte x_i^{neu} aus den vorherigen x_i^{alt} und v_i^{alt} bestimmt werden. Hierbei gilt:

$$x_i^{neu} = x_i^{alt} + v_i^{neu}$$

3.1 Nagel-Schreckenberg Modell

Das Nagel-Schreckenberg Modell [5] ist ein grundlegendes Modell zur Modellierung von Verkehrsströmen durch Cellular Automata. Es wurde im Jahr 1992 eingeführt und später durch einige Anpassungen weiterentwickelt, siehe z.B. [6] und [7].

Hierbei werden die diskreten Orte $x_i \in \{0, 1, \dots, L\}$ und Geschwindigkeiten $v_i \in \{0, 1, \dots, v_{max}\}$ der einzelnen Autos in jedem Zeitschritt gemäß folgender Regeln aktualisiert:

1. Beschleunigung: $v_i \rightarrow \min(v_{max}, v_i + 1)$
2. Wechselwirkung zwischen Autos: $v_i \rightarrow \min(v_i, d_i - 1)$
3. stochastisches Bremsen: $v_i \xrightarrow{\zeta(v)} \max(0, v_i - 1)$
4. Positionen anpassen: $x_i \rightarrow x_i + v_i$

In einem Zeitschritt wird jedes Teilchen dabei zunächst um eins beschleunigt, wobei eine Maximalgeschwindigkeit v_{max} nicht überschritten werden darf. Anschließend erfolgt eine vom Abstand $d_i = x_{i+1} - x_i$ zum nächsten Teilchen abhängige Anpassung, womit die Kollision zweier Teilchen verhindert werden kann. Danach wird mit Wahrscheinlichkeit $\zeta(v)$ die Geschwindigkeit um eins verringert. Zuletzt werden die neuen Positionen der Teilchen ermittelt.

Im ursprünglichen Nagel-Schreckenberg Modell ist die Wahrscheinlichkeit zur Abbremsung unabhängig von der Geschwindigkeit: $\zeta(v) = const$, in diesem Fall treten jedoch keine Metastabilitäten auf [7]. Es existieren jedoch Verallgemeinerungen, wie das Cruise-Control-Modell. In diesem ist $\zeta(v)$ ist gegeben durch:

$$\zeta(v) = \begin{cases} 0 & v = v_{max} \\ \zeta_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (22)$$

Andere Ansätze, wie Slow-to-start-Modelle nehmen beispielsweise eine verringerte Beschleunigung für stehende Autos gemäß $\zeta(0) > \zeta(v > 0)$ an. Auch in diesem Fall lassen sich Metastabilitäten finden [6].

Das Nagel-Schreckenberg Modell lässt sich auch alternativ in der folgenden, kompakteren Form formulieren:

$$x_n(t+1) = x_n(t) + \max[0, \min(v_{max}, d_n(t) - 1, v_n(t) - 1) - \xi(t)] = f(v_n(t), d_n(t), \xi(t)) \quad (23)$$

wobei $\xi(t) \in \{0, 1\}$ eine stochastische bool'sche Variable darstellt, welche mit Wahrscheinlichkeit ζ den Wert 1 annimmt und sonst 0. Für die Geschwindigkeit gilt: $v_n(t) = x_n(t) - x_n(t-1)$.

3.2 Verbindung von Cellular Automata zu Optimal-Velocity-Modellen und der Langevin Gleichung

Cellular-Automata-Modelle lassen sich mit gewöhnlichen Optimal-Velocity-Modellen und deren Langevin Gleichung verbinden. Hierfür betrachten wir ausgehend von Gleichung 23 nun allgemein ein Cellular-Automata-Modell der folgenden Form:

$$x_n(t+1) = x_n + f(v_n(t), d_n(t), \zeta_n(t)) \quad (24)$$

wobei $x_n(t)$ der Ort des Teilchens n zur Zeit t ist, $d_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ der Abstand des Teilchens zum nächsten Teilchen und ζ die stochastische Fluktuation darstellt.

Nach [8] können wir die Gleichung nun schreiben als:

$$x_n(t+1) + x_n(t-1) - 2x_n(t) = f(v_n(t), \Delta x_n(t), \zeta_n(t)) - \{x_n(t) - x_n(t-1)\} \quad (25)$$

Im Limes¹ $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ geht das über in:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(v_n, \Delta x_n, \zeta_n) - v \quad (26)$$

Damit stellen Cellular Automata eine raum-zeitliche Diskretisierung der Optimal-Velocity-Langevingleichung dar. Hierbei entspricht die hier zunächst unbestimmte Funktion $f(v_n, \Delta x_n, \zeta_n)$ der Optimal-Velocity-Funktion in Optimal-Velocity-Modellen.

¹wir hatten $\Delta t = 1$ gesetzt. $x(t+1)$ entspricht damit $x(t + \Delta t)$. $\Delta x \rightarrow 0$ wird implizit benötigt zur Auswertung von $x(t + \Delta t)$

3.3 Simulationen mit Hilfe von Cellular Automata

Für die Simulationen mit Cellular Automata werden, wie auch schon zuvor, periodische Randbedingungen angenommen. N Autos befinden sich hierfür auf einem Ring der Länge L . Abbildung 5 zeigt das Fundamentaldiagramm des Cruise-Control-Modells für $L = 1000$, $v_{max} = 5$ und $p = 0.25$. Aufgetragen werden der gemittelte Fluss J des Autostroms über die Dichte $\rho = N/L$ an Autos. Zwei verschiedene Anfangsbedingungen werden betrachtet: einmal eine homogene Verteilung der Autos mit Anfangsgeschwindigkeit $v_i = 4$ für alle Autos, sowie eine Verteilung, in der alle Autos zu Beginn in einem Stau sind. Es ist bei einer kritischen Dichte von $\rho_{krit} \approx 1/6$ eine sprunghafte Abnahme des homogenen Flusses zu beobachten. In einem Zwischenbereich $\rho \in (0.11, \rho_{krit})$ existiert eine Metastabilität zwischen homogenem Fluss und Stau.

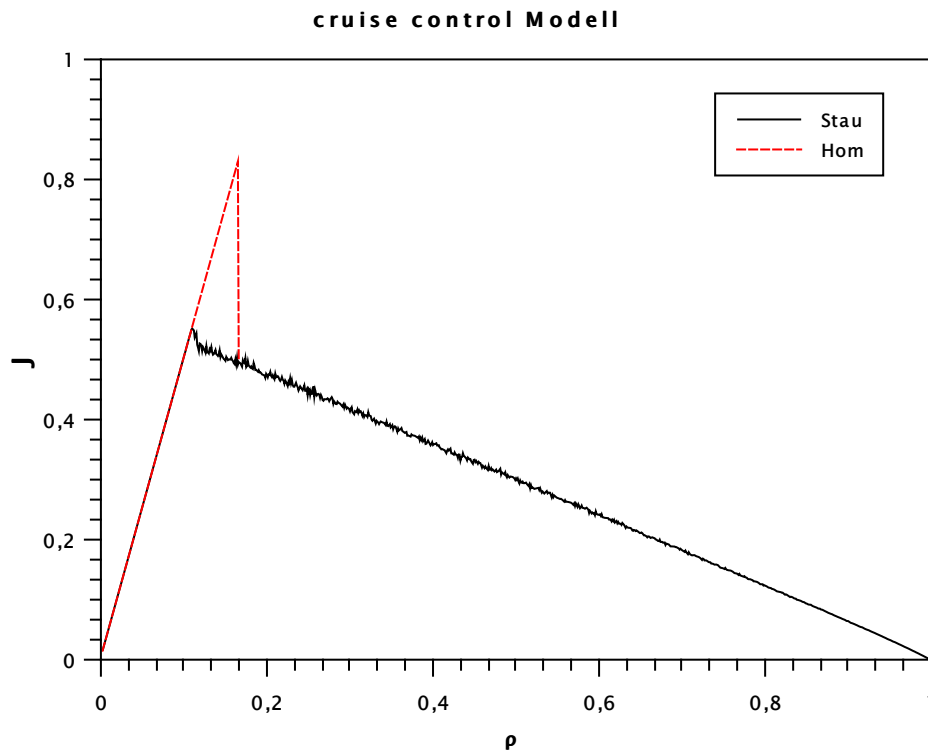


Abb. 5: Fundamentaldiagramm (Fluss über Dichte) des cruise control Modells für $L = 1000$, $p = 0.25$, $v_{max} = 5$ und verschiedene Anfangsbedingungen. Im Bereich $\rho \approx 0.11$ und ρ_{krit} findet man eine Metastabilität zwischen homogener Phase und Stau. Ab einer kritischen Dichte $\rho_{krit} \approx 1/6$ fällt der Fluss der homogenen Phase abrupt ab und entspricht dem des Staus. Die Größen wurden jeweils räumlich und zeitlich gemittelt.

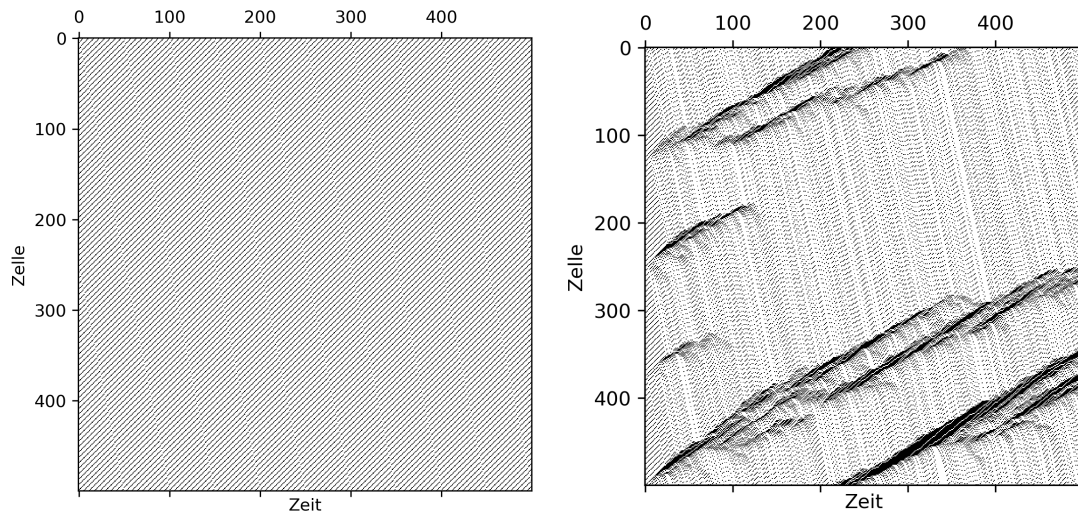


Abb. 6: Space-Time-Plots für verschiedene Realisierungen des cruise control Modells für $L = 500$, $v_{max} = 5$, und $p = 0.25$. Links: homogene Verteilung für $\rho < \rho_{krit}$ ($N=83$). Rechts: Clusterbildung (Stau) mit Ausbildung von Dichtebändern bei Überschreiten der kritischen Dichte ρ_{krit} für $N = 84$. Die Anfangsbedingungen entsprechen einer homogenen Verteilung.

Abbildung 6 zeigt zugehörige Space-Time-Plots im Fall homogener Anfangsbedingungen für eine Dichte kurz vor der kritischen Dichte, sowie kurz nach der kritischen Dichte. Bevor die kritische Dichte erreicht ist, ergibt sich eine homogene Verteilung, in der die Fluktuationen kaum sichtbar sind. Bei Überschreiten der kritischen Dichte bilden sich spontan Cluster aus, in denen der Verkehr gestaut ist, sowie zwischen den Clustern Bereiche mit nur geringer Verkehrsdichte. Die Cluster können dabei nach kurzer Zeit wieder verschwinden, oder auch ausgeprägte Dichtebänder ausbilden. Die Ausbildung solcher Dichtebänder ist zudem ein bekanntes Phänomen bei self-propelled-particles [9, 10].

4 Ausblick

Es wurden die theoretischen Grundlagen einer mikroskopischen Modellierung von Verkehrsströmen basierend auf Statistischer Physik erläutert. Des Weiteren wurden Simulationen mithilfe von Zellulären Automaten gezeigt, die die Ausbildung von Dichtebändern, bekannt aus physikalischen Systemen wie z.B. self-propelled-particles, vorweisen.

Der Einblick, den die vorliegende Arbeit in die stochastische Modellierung von Verkehrsströmen gibt, beschränkt sich bisher allerdings auf ein äußerst simples Modell. Um tatsächlichen Verkehrssituationen näher zu kommen, reicht eine Spur nicht. Sogenannte Multilane-Modelle, die diese Beschränkung aufheben, sind allerdings um einiges komplizierter [11]. Weitere Faktoren, die auch bei Multilane-Modellen oft außer Acht gelassen werden, wie z.B. Reaktionen der Fahrer auf Blinken, Einflüsse der Umgebung auf die Sicht oder Fahrbahnschäden erschweren realistische Modellierungen [1]. Im Hinblick auf die stetig wachsende Entwicklung selbstfahrender Autos sind die Erkenntnisse der genannten Modelle allerdings trotzdem relevant. Wenn die stochastischen Terme (etwa zufälliges Abbremsen durch menschliche Überreaktionen) durch autonome Autos reduziert werden, und die Autos zudem miteinander kommunizieren, könnten "Staus aus dem Nichts" möglicherweise verhindert werden.

Ein weiterer Anwendungsbereich ähnlicher Modelle ist die Dynamik von Fußgängern. In Abbildung 7 werden Ergebnisse aus [12] vorgestellt. Hier werden einzelne Fußgänger in einer Fluchtsituation als "biased random walker" modelliert. Jeder der Fußgänger bewegt sich auf den Ausgang zu und hat demnach eine definierte Richtung. Ähnlich wie in den bisher gezeigten Fundamentaldiagrammen, kann nun der Fluss der Fußgänger in Abhängigkeit der Türbreite aufgetragen werden (siehe 7 b). Es sind mehrere Phasen zu erkennen: zunächst bewegen sich alle Walker auf den Ausgang zu, somit steigt der Fluss. Allerdings erreicht dieser ein Maximum, wenn die Fußgänger nahe der Tür zu dicht aneinander stehen und somit nur langsam austreten können. Diese Phase der

"Verstopfung" dauert länger, wenn die Türbreite kleiner wird. Nach einiger Zeit sinkt das Fluss wieder, die Verstopfung an der Tür löst sich und alle Walker treten aus. Solche und ähnliche Modelle [13] können helfen, die Gefahr in Paniksituationen zu erkennen und einzudämmen.

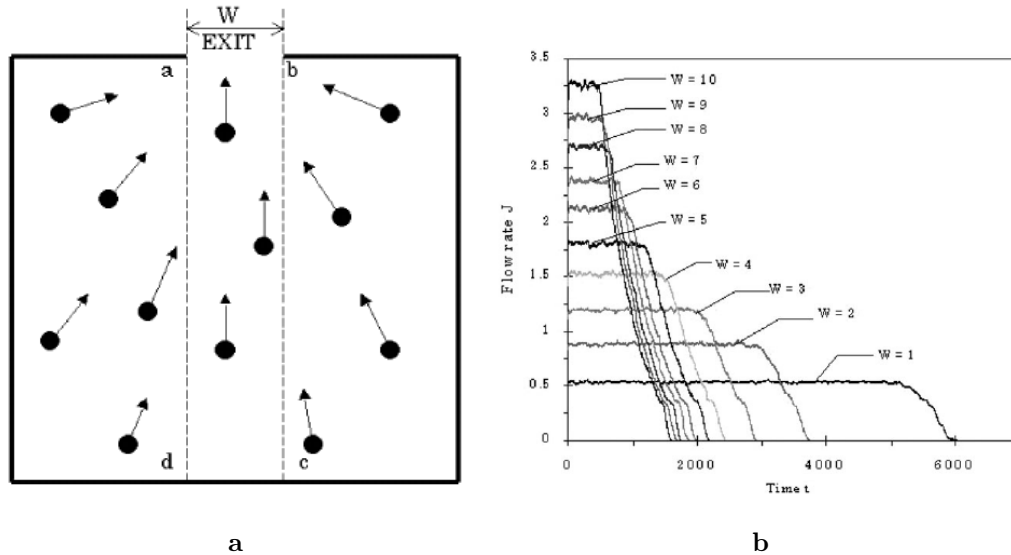


Abb. 7: **a** zeigt eine schematische Darstellung der modellierten Fluchtsituation. Jeder Walker (schwarze Kreise) bewegt sich ohne Rückschritt auf den Ausgang zu, um die Halle zu verlassen. **b** zeigt den zugehörigen Fluss $J(t)$ für unterschiedliche Türbreiten W . Man erkennt drei Phasen: Zunächst steigt der Fluss sehr rasch an, während alle Walker sich zum Ausgang bewegen. Dann bleibt der Fluss auf einem konstanten Niveau, da sich um die Tür eine Verstopfung bildet und die Walker nacheinander hinausmüssen. In der letzten Phase löst sich die Verstopfung und der Fluss nimmt ab, während die letzten Walker die Halle verlassen. Abbildung entnommen aus [12].

References

- [1] D. Helbing, "Traffic and related self-driven many-particle systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 73, pp. 1067–1141, dec 2001.
- [2] R. Kühne, R. Mahnke, I. Lubashevsky, and J. Kaupužs, "Probabilistic description of traffic breakdowns," *Physical Review E*, vol. 65, jun 2002.
- [3] N. G. V. Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North Holland; Third edition, 2007.
- [4] M. Cremer and J. Ludwig, "A fast simulation model for traffic flow on the basis of boolean operations," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 28, no. 4, pp. 297–303, 1986.
- [5] K. Nagel and M. Schreckenberg, "A cellular automaton model for freeway traffic," *Journal de physique I*, vol. 2, no. 12, pp. 2221–2229, 1992.
- [6] R. Barlovic, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg, "Metastable states in cellular automata for traffic flow," *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 793–800, 1998.
- [7] D. E. Wolf, "Cellular automata for traffic simulations," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 263, no. 1-4, pp. 438–451, 1999.
- [8] T. Nagatani, "The physics of traffic jams," *Reports on Progress in Physics*, vol. 65, no. 9, 2002.
- [9] R. Großmann, F. Peruani, and M. Bär, "Mesoscale pattern formation of self-propelled rods with velocity reversal," *Physical Review E*, vol. 94, no. 5, p. 050602, 2016.
- [10] Q.-s. Chen and Y.-q. Ma, "Collective motion of self-propelled particles with density-dependent switching effect," *AIP Advances*, vol. 6, no. 5, p. 055024, 2016.
- [11] D. Helbing, "Modeling multi-lane traffic flow with queuing effects," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 242, pp. 175–194, aug 1997.
- [12] T. Nagatani, "The physics of traffic jams," *Reports on Progress in Physics*, vol. 65, pp. 1331–1386, aug 2002.
- [13] D. Helbing and A. Johansson, "Pedestrian, crowd, and evacuation dynamics," 2013.