

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

STATISTISCHE PHYSIK DES NICHTGLEICHGEWICHTS

ABSCHLUSSPROJEKT

Relativistische Brown'sche Bewegung

Autoren

Tobias UHLEIN
Thomas MAERTENS
Viktor BENDER

Betreuer

Dr. Jan Totz

20. Juli 2018

Zusammenfassung

Betrachtet man die Bewegung z.B. eines mesoskopischen Partikels in einer molekularen Flüssigkeit, wird diese als Brownsche Bewegung bezeichnet. [1] Besitzt das Medium in dem diese Bewegung stattfindet sehr hohe Temperaturen, so wird es notwendig, die Betrachtung unter Berücksichtigung der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) vorzunehmen. In dem hier schriftlich ausgearbeiteten Projekt werden, an eine kurze Literaturübersicht anschließend, zunächst einige Anwendungsgebiete aufgezählt und die bei möglichen Modellierungen auftretenden Probleme, sowie Ansätze zu deren Lösungen, kurz dargestellt. Anhand der Ergebnisse der durch die Autoren durchgeführten numerischen Simulationen von relativistischer und nicht-relativistischer Brownscher Bewegung, werden deren jeweilige Geschwindigkeitsverteilungen miteinander und mit den Ergebnissen aus der Literatur [1] verglichen. Abschließend wird diskutiert, wie sich thermodynamische, und damit makroskopische Größen wie Temperatur und Wärme in relativistisch bewegten Körpern verhalten bzw. diese überhaupt definiert werden. In der ganzen Arbeit wird sich vorwiegend auf Literatur von Jörn Dunkel ([1], [4], [2]) und Peter Hänggi ([4], [2]) bezogen.

I. LITERATURÜBERSICHT

Anhand des 2011 von Dunkel veröffentlichten Artikels "Relativ Heiß-Brownsche Bewegung und Thermodynamik in der Relativitätstheorie"[1], lässt sich ein guter Überblick über die Literatur bezüglich der hier untersuchten Problematik gewinnen. Beginnend mit der ersten erfolgreichen theoretischen Behandlung der Brownschen Bewegung durch Albert Einstein im Jahr 1905 [9], führen uns Hänggi und Marchesoni in "Introduction: 100 Years of Brownian Motion"[5] stichwortartig durch die daran anschließende Entwicklung auf dem Gebiet, und zeigen auf, welche Einflüsse auf andere Gebiete wie z.B. die Entwicklung der Quantenmechanik sich daraus ergaben und bis heute auf viele andere Gebiete ergeben. Eine mögliche, und laut Dunkel auch einfachste [1], Vorgehensweise zur Verbindung von Brownscher Bewegung und spezieller Relativitätstheorie, ist die Verwendung der Langevin-Gleichungen im relativistischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, einer Verall-

gemeinerung des gewöhnlichen Pendants, systematisch nachzulesen bei Debbasch et al. in "Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process"[6]. Die Verwendung solcher relativistischer Langevin-Gleichungen lässt sich ergänzen durch invariante Parametrisierungen, also die Parametrisierung bezüglich der Eigenzeit des Brownschen Teilchens. Daraus ergeben sich Möglichkeiten hinsichtlich der Behandlung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), wie z.B. der Untersuchung von Raum-Zeit-Singularitäten, welche von I. Bailleul in "A probabilistic view on singularities"[7] vorgenommen wurde. Eine Einführung in ein weiteres Problem, nämlich das der Frage nach der richtigen Transformation von physikalischen Größen in bewegte Bezugssysteme, gibt A. Gamba in "Physical Quantities in Different Reference Systems According to Relativity"[8].

II. ANWENDUNGSGEBIETE

Relativistische Diffusions-Prozesse, wie die Relativistische Brownsche Bewegung (RBB), haben zahlreiche mögliche Anwendungsgebiete. So spielt sie eine wichtige Rolle in SZufallsbewegungen in heißen Medien wie z.B. astrophysikalischen Plasmen"[1]. Außerdem wird prognostiziert, dass die RBB in Zukunft auch in Gebieten wie Thermalisierungs- und Relaxationsprozessen in der Astrophysik oder hochenergetischen Kollisionsexperimenten eine immer größere Rolle spielen wird [4]. Die Verwendung von relativistischen Fokker-Planck-Gleichungen findet ihre Anwendung derzeit in Modellen zu Diffusions- und Thermalisierungsprozessen in Quark-Gluon-Plasmen und komplexen hochenergetischen Prozessen in der Astrophysik [4].

III. PROBLEME BEI DER MODELLIERUNG

Bei der Modellierung von relativistischen Diffusionsprozessen, sowie bei dem Versuch der theoretischen Konstruktion einer relativistischen Thermodynamik treten verschiedene Probleme auf. Geht man von der klassischen Langevin-Gleichung aus, so stellt man fest, dass in der Geschwindigkeitsverteilung der Lösung der Gleichung, Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit auftreten [1]. Diese darf in der SRT jedoch unter keinen Umständen überschritten werden. Ist die Temperatur des Trägermediums nicht besonders hoch, so handelt es sich in der Verteilung um nur sehr wenige Teilchen, welche sich in dem "verbotenen Bereich" aufhalten, sodass diese vernachlässigbar sind. Bei höheren

Temperaturen verschiebt sich die Verteilung jedoch immerweiter über die Grenze der Lichtgeschwindigkeit. Zu dieser Problematik kommt noch ein "No-GoTheorem für relativistische Markov-Prozesse in der Minkowski-Raumzeit hinzu [4]. Um dieser Problematik zu begegnen gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten: entweder man gibt die Markov-Eigenschaft des Prozesses auf (siehe z.B. den Ansatz der Telegraphen-Gleichung [4]), oder man geht in den relativistischen Phasenraum über. Hier möchten wir uns auf letzteres, d.h. auf die Verwendung von relativistischer Orts- und Impulskoordinate, konzentrieren. Man spricht dann von Relativistischen Langevin-Gleichungen [1].

Aufgrund der "Grobkörnigkeit" der Thermodynamik, tritt bei dem Versuch der Verbindung dieser mit der SRT ein weiteres Problem auf. So gibt es in der SRT keinen universellen Zeitparameter welcher zur Berechnung der globalen, gemittelten Größen der Thermodynamik wie Wärme, Temperatur etc. verwendet werden könnte [4]. Zur Lösung dieses Problems werden in der Regel zunächst geeignete Hyperflächen gesucht um auf diesen die Zustandsvariablen zu definieren. Die Hyperflächen werden dabei zur Berechnung der Oberflächenintegrale benötigt, wobei die Flächen in der nicht-relativistischen Physik einfach der betrachtete Raum zu einem festen Zeitpunkt sind. In einem zweiten Schritt muss schließlich noch eine passende Definition für die gesuchten die thermodynamischen Größen gefunden werden. Diesen Weg sind bereits Einstein und Planck gegangen, deren Ergebnissen später von Ott und Van Kampen durch eigene Berechnungen widersprochen wird. Die Lösung von Dunkel

et al. verwendet als Hyperflächen die sog. Lichtkegel der SRT. [2] Welche Auswirkungen die verschiedenen Lösungsansätze haben und wie sie sich jeweils begründen wird weiter unten besprochen.

IV. BROWNSCHE BEWEGUNG IN DER RELATIVITÄTSTHEORIE

In diesem Kapitel werden als Beispiel von Brownschen Bewegungen im Phasenraum der nicht-relativistische und der relativistische Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (ROUP) kurz eingeführt (vgl. dazu im Folgenden [4]). Darauf aufbauend werden die Zufallsbewegungen in einem sehr heißen Medium wie z.B. Plasma simuliert und die stationären Verteilungen miteinander verglichen.

i. Nicht-relativistische Brownsche Bewegung

Langevin-Gleichungen:

Als Standardparadigma für die Brownsche Bewegung betrachten wir die eindimensionale Bewegung eines punktförmigen Brownschen Teilchens (Masse M), das von einem stationären homogenen Wärmebad umgeben ist, das aus kleineren Flüssigkeitsteilchen besteht (Masse $m \ll M$) bei konstanter Temperatur T . Das inertielle Ruhesystem des Wärmebads wird im Folgenden als Laborsystem bezeichnet. Die Position des Brownschen Teilchens im Laborsystem zum Zeitpunkt t wird als $X(t)$ bezeichnet und seine Geschwindigkeit ist gegeben durch $V(t) = dX(t)/dt$. Das zugehörige nicht-relativistische Moment des Brownschen Teilchens wird durch $P(t) = MV(t)$ definiert. Die stochastische Dynamik des Brownschen Teilchens aufgrund

der Wechselwirkung mit dem Wärmebad kann durch die Langevin-Gleichungen in differenzieller Form

$$dX = \frac{P}{M} dt \quad (1)$$

$$dP = -\alpha(P) P dt + \sqrt{2D(P)} \cdot dB(t) \quad (2)$$

ergänzt durch die Anfangsbedingungen $X(0) = X_0$ und $P(0) = P_0$ beschrieben werden. Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (2) ist eine Reibungskraft, wobei die Form der Reibungskoeffizientenfunktion $\alpha(P) > 0$ abhängig von den mikroskopischen Details der Partikel-Bad-Wechselwirkung ist. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (2) ist die stochastische Langevin-Kraft, welche die Schwankungen im umgebenden Wärmebad wider spiegelt. Die Zufallsfunktion $B(t)$ ist eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung oder äquivalent, ein Standard-Wiener-Prozess, dessen Zuwächse

$$dB(t) = B(t + dt) - B(t) \quad (3)$$

als stochastisch unabhängig definiert sind und einer Normalverteilung mit Mittelwert Null und Varianz dt genügen:

$$\mathbb{P}\{dB(t) \in [y, y + dy]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} \exp\left(\frac{-y^2}{2dt}\right) dy. \quad (4)$$

Es lohnt sich, die physikalischen Annahmen zusammenzufassen, die den Langevin-Gleichungen (1) und (2) implizit zugrunde liegen:

-Das Wärmebad ist räumlich homogen und stationär; d.h. Relaxationsprozesse innerhalb des Wärmebades treten auf Zeitskalen auf, die viel kürzer sind als die relevanten dynamischen Zeitskalen, die mit der Bewegung des schweren Brownschen Partikels assoziiert sind.

-Stochastische Stöße zwischen den Brownschen Teilchen und den Bestandteilen des Wärmebads treten praktisch unkorreliert auf.

- Auf makroskopischer Ebene wird die Wechselwirkung zwischen Brownschen Teilchen und Wärmebad ausreichend gut durch den Reibungskoeffizienten α und die stochastische Langevin-Kraft beschrieben.

- Gl. (1) und (2) gelten im Laborsystem, entsprechend dem spezifischen Inertialsystem, wo die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebadpartikel für alle Zeiten t verschwindet.

Diskretisierungsregel:

Eine stochastische Kraft mit einer momentenabhängigen Rauschamplitudenfunktion $D(P)$ wie in Gl. (2) wird üblicherweise als "multiplikatives" Rauschen bezeichnet. Bei der Betrachtung von SDE, die multiplikative Störterme enthalten, ist die Spezifikation der Diskretisierungsregel notwendig, da für die festen Funktionen $\alpha(P)$ und $D(P)$ unterschiedliche Diskretisierungsschemata im Allgemeinen zu nicht äquivalenten stochastischen Prozessen führen; anders ausgedrückt, die Werte des stochastischen Integrals $P(t)$ definiert durch Gl.(2) hängen von der Wahl der Diskretisierungsregel ab. Dies ist der wesentlichste Unterschied im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Integralkurven (z.B. Lösungen) unabhängig vom zugrundeliegenden Diskretisierungsschema sind, wenn die Kontinuumsgrenze $dt \rightarrow 0$ genommen wird. Im Folgenden wird die Rückwärts-Diskretisierungsregel von Ito

$$C(P) \cdot dB(t) = C(P(t+dt))dB(t) \quad (5)$$

verwendet, wobei die Funktion $C(P) = \sqrt{D(t)}$ für $P(t+dt)$ bewertet wird. Die Ito-Regel führt zu einer einfachen Form des Fluktuations- und Dissipations-Theorems.

Fokker-Planck-Gleichung (FPE):

Wenn man stochastische Differentialgleichungen (SDE) vom Typ (2) studiert, ist man typischer Weise an die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) des stochastischen Prozesses (2) interessiert, die durch die FPE beschrieben wird. Befindet sich das Brownsche Teilchen im Gleichgewicht mit dem umgebenden Wärmebad, dann ist die stationäre Lösung der PDF eine Maxwellverteilung. Setzt man diese in die FPE ein, findet man, dass die Funktionen $\alpha(P)$ und $D(P)$ über die Einstein-Relation

$$D(P) = \alpha(P) M k_B T \quad (6)$$

miteinander verknüpft sind. Die Fluktuations-Dissipations-Beziehung (6) legt nur einen der beiden Koeffizienten $\alpha(p)$ und $D(P)$ fest. Anders gesagt, man ist immer noch frei, zum Beispiel die Funktion $\alpha(p)$ so anzupassen, dass der stochastische Prozess (2) das richtige Relaxionsverhalten zeigt. Diese Freiheit ist ein Hauptgrund, warum der Langevin-Ansatz erfolgreich auf eine Vielzahl von Thermalisierungsverfahren anwendbar ist.

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

Als Standardparadigma für einen nicht-relativistischen Prozess der Brownschen Bewegung betrachten wir den klassischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, der durch die Wahl einer konstanten Reibungskraft $\alpha(P) = \alpha_0$ gegeben ist. Für den Diffusionskoeffizienten D ergibt sich nach Gleichung (6)

$$D(P) = \alpha_0 M k_B T = \frac{\alpha_0 M}{\beta} = \frac{\alpha_0 M^2}{\chi}, \quad (7)$$

wobei $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und $\chi = \beta M$. Mittels $P(t) = MV(t)$ erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) den zugehörigen sto-

chastischen Geschwindigkeitsprozess

$$dX = V dt \quad (8)$$

$$dV = -\alpha_0 V dt + \sqrt{\frac{2\alpha_0}{\chi}} \cdot dB(t). \quad (9)$$

Es ist anzumerken, dass in diesem Fall die Diskretisierungsregel keinen Einfluss auf die Integration der Impulsgleichung hat, da D und somit auch C nicht von P abhängen.

ii. Relativistische Brownsche Bewegung

Relativistische Langevin-Gleichungen:

In der speziellen Relativitätstheorie ist der Begriff der Zeit vom System abhängig und es ist wichtig, im Voraus zu spezifizieren, welcher Zeitparameter verwendet wird, um die Fluktuationen des stochastischen Prozesses zu quantifizieren. Betrachtet man die stochastische Bewegung eines relativistischen Brownschen Teilchens, können zwei charakteristische Zeitparameter unterschieden werden: Die Koordinatenzeit t des inertialen Laborsystems, die als die Eigenzeit des Wärmebads interpretiert werden kann, und die Eigenzeit des Brownschen Teilchens. Im Prinzip könnte jeder der beiden Parameter verwendet werden, um SDE für die räumliche Komponente des Teilchenmomentums P/P_0 zu formulieren. Innerhalb des konventionellen Langevin-Bildes der Brownschen Bewegung werden Reibung und Rauschen als extern auferlegte Kräfte betrachtet, die auf das Brownsche Teilchen einwirken und die Fluktuationen im Wärmebad reflektieren. Daher erscheint es natürlicher, die statistischen Eigenschaften der Rauschquelle in Bezug auf die Laborzeit t zu charakterisieren. Ersetzt man in Gleichung (1) die Masse durch die relativistische Energie, lassen

sich t -parametrisierte stochastische Prozesse

$\{X(t), P(t)\}$ in Bezug auf das Laborsystem konstruieren. Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen dann die räumlichen Komponenten der Vierervektoren $\{X_0, X\}$ und $\{P_0, P\}$. Weiterhin lässt sich aus der Impulsgleichung (2) mittels Ito-Integral (rückwärts) eine Gleichung für die relativistische Energie herleiten.

Unter der Annahme eines stationären, isotropen und homogenen Wärmebads im Laborsystem hängen die Funktion α und D nur von ihrer relativistischen Energie $P_0 = \sqrt{M^2 + P^2}$ ab, d.h. $\alpha(P) = \hat{\alpha}(P_0)$ und $D(P) = \hat{D}(P_0)$. Eine zusätzliche Einschränkung der Funktionen $\alpha(P) = \hat{\alpha}(P_0)$ und $D(P) = \hat{D}(P_0)$ folgt aus thermostatischen Überlegungen: Wenn die Bewegung eines Brownschen Teilchens durch ein endliches Volumen eingeschränkt ist und das Wärmebad sich im thermischen Gleichgewicht befindet, dann ist die erwartete stationäre Lösung der FPE eine räumlich homogene Jüttner-Verteilung. Setzt man diese in die FPE ein, findet man die relativistische Einstein-Relation

$$\hat{D}(P_0) = \hat{\alpha}(P_0) P_0 k_B T. \quad (10)$$

Vergleicht man Gleichung (10) mit Gleichung (6), ist anzumerken, dass im relativistischen Fall die Masse M durch die relativistische Energie P_0 ausgetauscht wurde.

Die relativistischen Langevin-Gleichungen lauten

$$dX = \frac{P}{P_0} dt \quad (11)$$

$$dP = -\alpha(P) P dt + \sqrt{2D(P)} \cdot dB(t) \quad (12)$$

und die relativistische Energie folgt dem stochastischen Prozess

$$dP_0 = \left\{ -\hat{\alpha}_c(P_0) P_0 \left[1 - \left(\frac{M}{P_0} \right)^2 \right] - \frac{\hat{D}(P_0)}{P_0} \left(\frac{M}{P_0} \right)^2 \right\} dt + \sqrt{2\hat{D}(P_0) \left[1 - \left(\frac{M}{P_0} \right)^2 \right]} \cdot dB(t). \quad (13)$$

Definiert man weiterhin für $P(V) = MV(1-V^2)^{-\frac{1}{2}}$ neue Koeffizienten $\tilde{\alpha}(V) := \alpha(P(V))$ und $\tilde{D}(V) = D(P(V))$

und wendet das Ito-Integral auf die relativistische Geschwindigkeit $V(t) = P/P_0$ an, findet man die SDE für den relativistischen Geschwindigkeitsprozess

$$dV = \left[-\tilde{\alpha}(V)(1-V^2) + \left(\frac{3\tilde{D}(V)}{M^2} \right) (1-V^2)^2 \right] V dt + \sqrt{\left(\frac{2\tilde{D}(V)}{M^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dB(t). \quad (14)$$

Relativistischer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

Der relativistische Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ergibt sich durch Wahl von

$$\alpha(P) = \alpha_c \frac{M}{P_0}, \quad (15)$$

wobei $\alpha_c > 0$ ein konstanter Reibungsparameter ist. Der Diffusionskoeffizient gemäß der relativistischen Einstein-Relation (10) lautet damit

$$\begin{aligned} D(p) &= \alpha(P_0) P_0 k_B T \\ &= \frac{\alpha(P_0) P_0}{\beta} \\ &= \frac{\alpha(P_0) P_0 M}{\chi} \\ &= \frac{\alpha_c M^2}{\chi} = D_c. \end{aligned} \quad (16)$$

Setzt man die Ergebnisse in Gleichung (14) ein, ergibt sich der stochastische Ge-

schwindigkeitsprozess zu

$$dX = V dt \quad (17)$$

$$\begin{aligned} dV &= -\alpha_c \left[(1-V^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\chi} (1-V^2)^2 \right] V dt \dots \\ &\dots + \sqrt{\frac{2\alpha_c}{\chi} (1-V^2)^3} \cdot dB(t). \end{aligned} \quad (18)$$

iii. Numerische Simulation

Anhand der Gleichungen für den nicht-relativistischen und den relativistischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses im Phasenraum wurden die Brownschen Bewegungen von $N = 10.000$ Teilchen bis zur Zeit $t = 2$ in $dt = 0,002$ kleinen Zeitschritten simuliert. Dazu wurde für den Reibungskoeffizienten α der Wert Eins gewählt und für χ der Wert $3/2$. Die Temperatur ist mit χ verknüpft über

$$T = \frac{1}{\chi} \frac{Mc^2}{k_B} = \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{k_B} \quad (19)$$

und liegt im Bereich, wie man sie z.B. in sehr heißen Medien wie Plasmen vorfindet. Die Ergebnisse sind in Abb.:1 visualisiert.

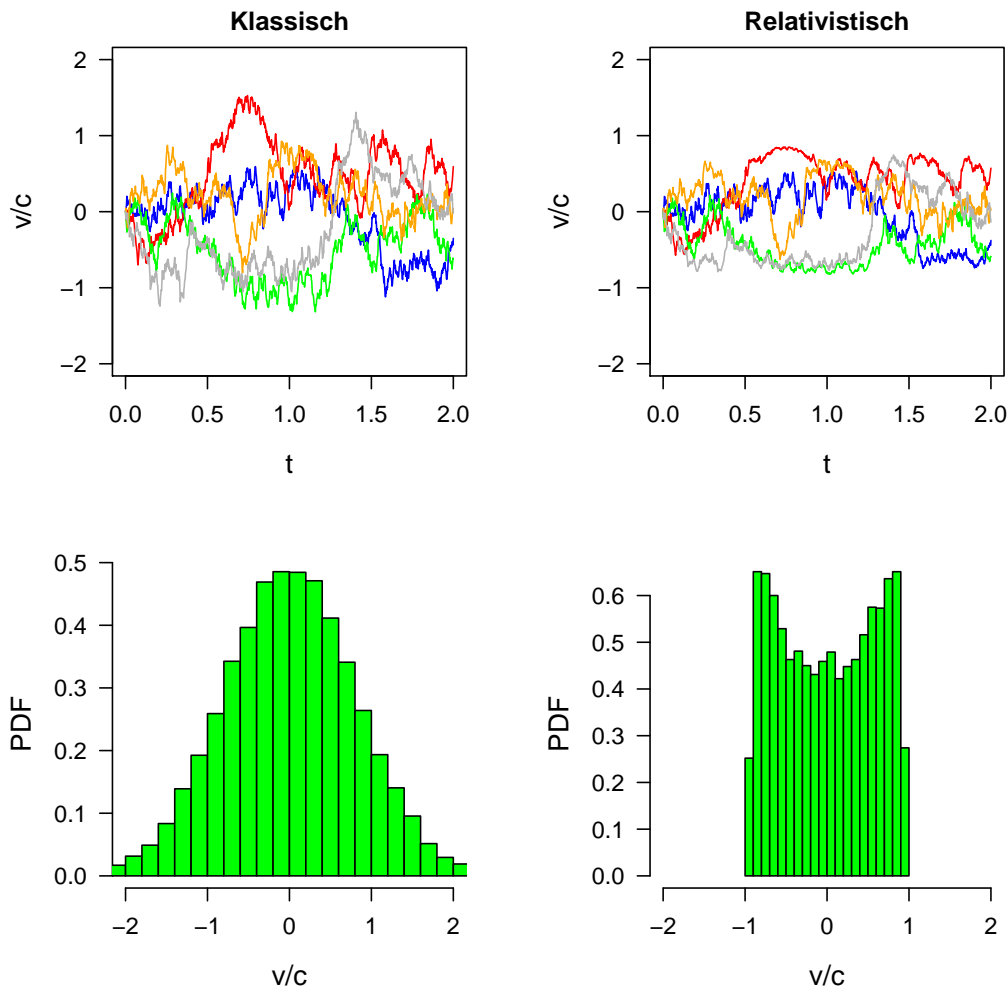


Abbildung 1: Simulationen Brownscher Bewegungen

Oben sind typische Geschwindigkeitsentwicklungen für Brownsche Teilchen dargestellt und darunter die stationären Verteilungen (PDF). Es ist bereits an den Trajektorien der Teilchen zu erkennen, dass diese sich im nicht-relativistischen Fall mit Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit bewegen können. Während die stationäre Verteilung im nicht-relativistischen Fall die Form einer Normalverteilung mit Maximum bei Null hat, stellt sich die relativistische PDF ganz anders da.

Wo vorher ein Maximum war ist jetzt ein Krater und die Wahrscheinlichkeiten ein Teilchen im Intervall $[v, v + dv]$ anzutreffen sind maximal nahe der Lichtgeschwindigkeit. Somit zeigt die nicht-relativistische Brownsche Bewegung ein völlig falsches Bild und ist in sehr heißen Medien als problematisch anzusehen.

V. RELATIVISTISCHE FORMULIERUNG DER THERMODYNAMIK

i. Fragestellung

Zum Abschluss untersuchen wir die derzeit vorliegenden möglichen Formulierungen der Thermodynamik innerhalb der speziellen Relativitätstheorie. Die Autoren in [1] und [2] stellen hierzu 4 verschiedene Möglichkeiten vor. Von besonderem Interesse ist für uns dabei folgende Fragestellung: Ein Gefäß mit einem relativistischen Gas (Jüttner Gas) und ein Beobachter bewegen sich relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit vom Betrag v . Das Gas habe im Ruhesystem des Gefäßes die Temperatur T . Welche Temperatur wird im Ruhesystem des Beobachters gemessen?

Das Relativitätsprinzip fordert die Kovarianz relativistischer Theorien unter Lorentztransformation. Mit Ausnahme der Elektrodynamik ist aber keine klassische Theorie mit dem M_4 und dem Relativitätsprinzip in Übereinstimmung zu bringen. Wir haben also vollständig neue Gesetze zu finden. Diese lassen sich jedoch nicht eindeutig aus den Klassischen ableiten. Viel mehr muss man bei der Formulierung relativistischer Theorien (wie seinerzeit bei den Gesetzen klassischer Theorien auch) gezielt raten. Dieses 'Raten' erfolgt dabei nach den folgenden aus Plausibilitätsgründen notwendigen Kriterien:

1. Im klassischen Grenzfall geht die relativistische in die klassische Theorie

ii. Vorbemerkung

Beim Leser dieser Ausarbeitung wird von einem Minimum an Kenntnissen bezüglich der speziellen Relativitätstheorie (SRT) ausgegangen. Um ein Verständnis über die Problematik bei der Formulierung einer relativistischen Thermodynamik zu ermöglichen, treffen wir daher zunächst einige grundlegende Aussagen.

Die zwei fundamentalen Postulate der SRT lauten:

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
2. Relativitätsprinzip

Aus dem ersten Postulat folgt der Minkowski-Raum M_4 als allen Theorien zugrundeliegende Raumstruktur und die Lorentztransformation (Λ^μ_ν) als Transformationsgesetz für Tensoren zwischen inertialen Systemen mit

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \Lambda^{\alpha_1}_{\tau_1} \dots \Lambda^{\alpha_n}_{\tau_n} \Lambda^{\rho_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\rho_m}_{\beta_m} T^{\tau_1 \dots \tau_n}_{\rho_1 \dots \rho_m} . \quad (20)$$

über

2. Die Theorie erfüllt das Relativitätsprinzip

Diese Kriterien legen die Gesetze einer Theorie keinesfalls eindeutig fest, sondern markieren nur die Grenzen für den Handlungsspielraum in derer sich die Beschreibungen zu befinden haben. Es bieten sich also mehrere Versionen einer Theorie an. Dies werden wir auch am nachfolgenden Beispiel einer relativistischen Thermodynamik sehen. Die Bestätigung muss letztlich durch das Experiment erfolgen.

iii. Physikalisches System

Das System von dem man bei der Formulierung einer relativistischen Thermodynamik ausgeht, ist das in [2] und [3] diskutierte Jüttner Gas. Die für uns wichtigsten Eigenschaften dieses Gases listen wir im Folgenden auf:

- Das Gas bestehe aus N Teilchen
- Die Teilchen haben einen relativistischen Impuls $\mathbf{p}_i = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} \mathbf{v}_i$
- Es gilt $\partial_\mu j^\mu = 0$ im Ruhesystem des Gases
- Das Gas ist im Ruhesystem in einem Volumen V eingeschlossen
- Das Gas habe in V die konstante Massendichte ρ

Dabei ist (j^μ) der sogenannte 4er-Strom. Die Gleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ stellt das relativistische Analogon zur Kontinuitätsgleichung dar und ist das Charakteristikum für stationäre Gase. Aus diesen Eigenschaften lässt sich der für unsere weiteren Betrachtungen wichtige Energie-Impulstensor des Systems ableiten [3]:

$$(T^{\mu\nu}) = N\rho \begin{pmatrix} \langle p^0 \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Dabei ist $\langle p^0 \rangle$ die mittlere Teilchenenergie und β der Boltzmann-Faktor. Die Innere Energie und der Impuls zusammengefasst als Komponenten einer Größe (U^ν) , berechnen sich als Oberflächenintegrale über $(T^{\mu\nu})$ im Minkowskiraum mit

$$U^\nu = \int_{\partial V_4} d\sigma_\mu T^{\mu\nu}. \quad (22)$$

Außerdem lässt sich die Energie- und Impulserhaltung durch Berechnen von $\partial_\mu T^{\mu\nu}$

überprüfen. Für diese ergibt sich wegen der Diskontinuität bezüglich der Massendichte am Rand des Volumens

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu = 0 \\ N\beta^{-1}\partial_\nu\rho & \text{für } \nu = 1, 2, 3 \end{cases}. \quad (23)$$

Die Energie ist für das System also erhalten - jedoch üben die Wände des Gefäßes einen Druck auf das Gas aus, weshalb die Divergenz des Energie-Impulstensors nicht vollständig verschwindet.

iv. Relativistische Formulierungen

Mit der Verbindung zur Inneren Energie über das Integral in (22) finden wir einen Anschluss zur Thermodynamik. Wie in [2] diskutiert ergeben sich jedoch für eine nicht verschwindende Divergenz des Energie-Impulstensors, wie sie in (23) vorliegt, Uneindeutigkeiten bei der Berechnung von (22). Insbesondere stellt sich die Frage nach der korrekten Integrationshyperfläche im Ruhesystem Σ des Gases und im Ruhesystem Σ' eines relativ dazu konstant bewegten Beobachters.

Ebenfalls problematisch gestaltet sich die damit verbundene relativistische Formulierung des ersten und zweiten Hauptsatzes. Erst durch das Aufstellen von geeigneten Postulaten ergeben sich mögliche relativistische Verallgemeinerungen der Thermodynamik. Wir fassen die Postulate der bestehenden Theorien und die sich daraus ergebenden Vorhersagen bezüglich der im Ruhesystem des bewegten Beobachters gemessenen Temperatur T' zusammen. Der Beobachter bewege sich im Folgenden mit der Geschwindigkeit v entlang der x^1 -Achse.

Nach Einstein und Planck:

1. Die Berechnung von (U^ν) und (U'^ν) erfolgt über isochrone Hyperflächen in Σ und Σ'
2. Der erste und zweite Hauptsatz sind forminvariant bezüglich der Lorentztransformation und lauten in Σ' :

$$dQ' := T' dS' := dU'^0 - v dU'^1 + P' dV' \quad (24)$$

Aus den Postulaten folgt, dass (U^ν) kein Lorentzvektor ist, da für diese Wahl der Integrationsgebiete $U'^\nu \neq \Lambda^\nu_\mu U^\mu$ gilt. Insbesondere sind auch Q und T keine Lorentzskalare. Für das Transformationsverhalten der Temperatur folgt

$$T' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T. \quad (25)$$

Damit erscheint nach Einstein und Planck ein bewegtes Gas kühler.

Nach Ott:

1. (U^ν) wird über eine isochrone (gleiche Zeiten) Hyperfläche in Σ berechnet
2. (U^ν) ist ein Lorentzvektor - (U^ν) und (U'^ν) sind durch die Lorentztransformation verbunden
3. Es existiert ein Lorentzvektor (Q^μ) für den

$$dQ^\mu := dU^\mu - dA^\mu \quad (26)$$

mit $(dA^\mu) = (-PdV, \mathbf{0})$ gilt.

4. Der zweite Hauptsatz ist über Q^0 mit

$$dQ^0 := T dS \quad (27)$$

definiert und ist forminvariant bezüglich der Lorentztransformation.

Daraus folgt, dass sich U'^ν nicht aus der Integration über eine isochrone Hyperfläche in Σ' ergibt. Auch hier sind die Wärme Q^0 und die Temperatur T keine Lorentzskalare. Für das Transformationsverhalten der Temperatur erhalten wir

$$T' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} T. \quad (28)$$

Nach Ott erscheint also ein bewegtes Gas wärmer.

Nach Van Kampen: Van Kampen stellt die Postulate 1-3 nach Ott auf und ersetzt Postulat 4 durch eine alternative Definition der Wärme mit

- Der zweite Hauptsatz ist über

$$dQ := -v_\mu dQ^\mu = dQ^0 \quad (29)$$

$$:= T dS \quad (30)$$

mit der 4er-Geschwindigkeit v_μ des Beobachters definiert und ist forminvariant bezüglich der Lorentztransformation.

Die Multiplikation aus zwei Lorentzvektoren ergibt immer einen Lorentzskalar. Damit sind Q und T Invarianten in Σ und Σ' . Nach Van Kampen bleibt die Temperatur eines bewegten Gases also unverändert.

Nach Dunkel, Hänggi und Hilbert Dunkel, Hänggi und Hilbert ersetzen das erste Postulat nach Ott durch

- (U^ν) ist eine lokale Größe und wird über die Oberfläche des nach hinten gerichteten Lichtkegels in Σ berechnet

und gehen dann weiter wie Van Kampen vor. Durch die spezielle Wahl der Integrationsoberfläche sind (U^{ν}) und (U'^{ν}) automatisch durch die Lorentztransformation miteinander verbunden. Ansonsten bleiben die Ergebnisse aus Van Kampens Theorie erhalten.

v. Abschlusskommentar

Die vorgestellten Formulierungen erfüllen alle die in der Vorbemerkung erwähnten Kriterien für relativistische Theorien innerhalb der SRT. Um ihre Gültigkeit zu überprüfen, benötigen wir nun die experimentelle Bestätigung. Dies gestaltet sich jedoch im Hinblick auf die Wahl der Integrationshyperflächen bei den Theorien nach Einstein-Planck, Ott und Van Kampen als schwierig bis unmöglich. Auch die Erweiterung auf die ART ist bei diesen Theorien abwägig. Damit bleibt die Formulierung nach Dunkel, Hänggi und Hilbert der bisher einzige für die Praxis verwertbare Vorschlag.

LITERATUR

- [1] J.Dunkel (2011) Relativ heiß *Phys. J.*
- [2] J.Dunkel, P.Hänggi, and S.Hilbert. (2009) Non-local observables and lightcone-averaging in relativistic thermodynamics *Nat. Phys.* 5, 741
- [3] F.Jüttner. (1911) Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativitätstheorie. *Ann. Phys.* 34, 856-882
- [4] J. Dunkel and P. Hänggi (2009) Relativistic Brownian Motion *Phys. Rep.* 471, 1
- [5] P. Hänggi and F. Marchesoni (2005) Introduction: 100 Years of Brownian Motion *Chaos* 15, 026101
- [6] F. Debbasch, K. Mallick and J. P. Rivet (1997) Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process *J. Stat. Phys.* 88, 945
- [7] I. Bailleul (2011) A Probabilistic View on Singularities *J. Math. Phys.* 52, 023520
- [8] A. Gamba (1967) Physical Quantities in Different Reference Systems According to Relativity *Amer. J. Phys.* 35, 83
- [9] A. Einstein (1905) Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen *Ann. Phys.* 17, 549-560