

Prof. Dr. Kathy Lüdge
Alexander Kraft, Leon Merfort, Dr. S. Mohsen J. Khadem

3. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mi. 16.05.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 6 (1+2+2+2=7 Punkte): SHANNON- und KULLBACK-Information

Im folgenden seien P^A und P^B die Verteilungen des gezinkten ($p_1 = \dots = p_5 = 1/10$ und $p_6 = 1/2$) und ungezinkten ($p_1 = \dots = p_6 = 1/6$) Würfels und $\rho_{\sigma\mu}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ sei die GAUSS-Verteilung.

- Berechnen Sie $I(P^A)$, $I(P^B)$, $K(P^A, P^B)$ und $K(P^B, P^A)$.
- Berechnen Sie $I(\rho_{\sigma\mu})$ und diskutieren Sie das Vorzeichen. Stehen Ihre Ergebnisse im Widerspruch zu $I(P) \leq 0$? Begründung!
- Beweisen Sie die Ungleichung $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ für $x > 0$.
- Berechnen Sie $K(\rho_{\sigma\mu}, \rho_{\sigma'\mu'})$. Diskutieren Sie das Vorzeichen von K . Stehen Ihre Ergebnisse im Widerspruch zu $K(P) \geq 0$? Begründung!

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung aus (c)!

Aufgabe 7 (3+3+3=9 Punkte): Vorurteilsfreie Schätzung für gezinkten Würfel

Gegeben sei ein Würfel dubioser Herkunft. Ein Kollege war sehr fleißig und hat nächtelang gewürfelt. Leider hat er vergessen, für jede mögliche Augenzahl eine separate Statistik zu machen, so dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i nach wie vor unbekannt ist.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i unter der Voraussetzung vorurteilsfreier Schätzung: Der Erwartungswert der Augenzahl ist bekannt und beträgt $\langle M^1 \rangle = 4,5$.

Hinweis: Sie werden im Verlauf der Aufgabe auf eine Gleichung des folgenden Typs treffen:

$$4,5 = \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6}{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}.$$

Es empfiehlt sich, diese Gleichung numerisch (z.B. mit dem Computeralgebraprogramm *Mathematica*) zu lösen.

- Leiten Sie allgemein (verallgemeinerte kanonische Verteilung) für die SHANNON-Information I folgende Beziehung her: $I(M) = \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) - \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \langle M^{\nu} \rangle$.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Beziehung aus (b) die SHANNON-Information der Wahrscheinlichkeitsverteilung des gezinkten Würfels.

Aufgabe 8 (2+2=4 Punkte): RÉNYI-Informationsmaß

Neben dem SHANNON-Informationsmaß ist auch das RÉNYI-Informationsmaß gebräuchlich:

$$I_q(P) = -\frac{1}{1-q} \ln \left[\sum_i P_i^q \right] \quad \text{bzw.} \quad I_q(\rho) = -\frac{1}{1-q} \ln \left[\int dx \rho^q(x) \right]$$

- Zeigen Sie für den Fall einer diskreten Verteilung, dass $\lim_{q \rightarrow 1} I_q$ der SHANNON-Information entspricht.
- Berechnen Sie I_q für eine GAUSS-Verteilung und vergleichen Sie mit der SHANNON-Information.

3. Übung TPIV SS 18

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Kathy Lüdge	Do, 14:00-15:00	EW 741
Alexander Kraft	Mi, 15:00-16:00	EW 269
Leon Merfort	Mo, 13:00-14:00	ER 240
Dr. S. Mohsen J. Khadem	Fr, 15:00-16:00	EW 267