Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 17. Mai 2018

Prof. Dr. Kathy Lüdge
Alexander Kraft, Leon Merfort, Dr. S. Mohsen J. Khadem

5. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mi. 30.05.2018 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 12 (1+1+1+2+1+4=10 Punkte): *Statistischer Operator gemischter Zustände*
Im Folgenden sei $\hat{\rho}$ ein statistischer Operator $\hat{\rho} = \sum_\alpha P_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ eines gemischten Zustands.

(a) Leiten Sie zunächst aus der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ folgende Gleichung (*von-Neumann-Gleichung*) her:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right].$$

Zeigen Sie nun folgende Eigenschaften:

(b) $\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right)$

(c) $\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\right) = 1$

(d) $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ und $\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}^2\right) < 1$, falls $P_\alpha \neq 0$ ist für mehr als ein α

(e) $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$

(f) Es seien die Operatoren $\hat{\rho}_\nu$ Dichtematrizen, die folglich die Bedingungen aus Teilaufgaben (b)-(e) erfüllen, und $P_\nu \geq 0$, $\sum_\nu P_\nu = 1$. Zeigen Sie, dass $\sum_\nu P_\nu \hat{\rho}_\nu$ ebenfalls diese Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 13 (1+2+3+2+2=10 Punkte): *Totale Differentiale*
Wir betrachten die Differentialform 1. Ordnung (totale Differentialgleichung) der Form

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0\,. \tag{1}$$

(a) Wann nennt man das Differential (1) exakt, wann intergrierbar und wann nicht integrierbar?

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Integrierbarkeitsbedingung der Differentialform (1)

$$P \cdot (\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) + Q \cdot (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}) + R \cdot (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0\,. \tag{2}$$

In welchem Fall ist dann die Differentialform exakt? Hinweis: Benutzen Sie dazu die Definition der Integrierbarkeit sowie die Vertauschung von Ableitungen. Vergessen Sie nicht den integrierenden Faktor mitzubenutzen.

(c) Sei nun folgende totale Differentialgleichung gegeben: $y^2dx - zdy + ydz = 0$.

(i) Überprüfen Sie diese Differentialgleichung auf Integrierbarkeit.

(ii) Handelt es sich um ein exaktes Differential? Falls nicht, wie lautet der integrierende Faktor?

(iii) Lösen Sie diese Gleichung, d.h. finden Sie eine Stammfunktion.

(d) Zeigen Sie nun, dass $\delta Q = dU - \delta W$ aus dem 1. Hauptsatz kein totales Differential ist. Gehen Sie von $\delta W = -pdV$ aus.

(e) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\alpha(T)$ so, dass aus δQ ein totales Differential wird. Gehen Sie dabei von einem idealen Gas ($p \cdot V = Nk_BT, (\frac{\partial U}{\partial T})_V = const$) aus. Was für ein Konstrukt erhalten wir dann?

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Kathy Lüdge	Do, 14:00-15:00	EW 741
Alexander Kraft	Mi, 15:00-16:00	EW 269
Leon Merfort	Mo, 13:00-14:00	ER 240
Dr. S. Mohsen J. Khadem	Fr, 15:00-16:00	EW 267