

2. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 06. Mai 2019 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 15. April 2019

Insgesamt 10 Punkte

Variationsprinzip I

1. Auf Übungsbogen 9 der ART I hatten Sie die Vakuumfeldgleichungen abgeleitet. Hier sind jetzt analog die vollständigen Feldgleichungen abzuleiten, wobei von der folgenden Lagrangedichte auszugehen ist:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_R) \quad \text{mit} \quad R = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \quad . \quad (1)$$

Dabei ist R der Ricci-Skalar, κ die Einsteinsche Gravitationskonstante, $R^{\alpha\beta}$ der Ricci-Tensor, sowie L_R die Lagrangefunktion der nichtgravitativen Felder (also des Rests).

Bestimmen Sie also die Einsteinschen Gleichungen aus (S ist die Wirkung):

$$0 = c \delta S = \delta \int \mathcal{L} dV_4 \quad \text{mit} \quad dV_4 := dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad . \quad (2)$$

Beachten Sie dabei die folgenden Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, daß das folgende Integral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umwandelbar ist:

$$\int \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} dV_4 \quad . \quad (3)$$

Dazu ist es sinnvoll, in einem ersten Schritt die Palatini-Gleichung abzuleiten:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \quad . \quad (4)$$

Danach ist zu zeigen, daß gilt:

$$\nabla_\alpha [\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}] = 0 \quad . \quad (5)$$

Beachten Sie dabei, daß die kovariante Ableitung einer beliebigen skalaren Dichte vom Gewicht $+1$ (B) gegeben ist durch:

$$\nabla_\nu B = \partial_\nu B - B \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda \quad (6)$$

Mit diesen Berechnungen kann jetzt das Volumenintegral (3) in ein Oberflächenintegral umgeformt werden!

Da die Variation der Metrik und ihrer ersten Ableitungen auf dem Rand des Integrationsbereichs verschwinden, kann dann dieses Integral fallen gelassen werden.

- Berechnen Sie dann aus dem von (2) verbleibenden Restintegral die Einsteinschen Feldgleichungen. Wie ist dabei der Energie-Impuls-Tensor der Restfelder durch die Variation definiert?
2. Es ist jetzt nach Palatini möglich, den affinen Zusammenhang $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ bei der Variation als von der Metrik $g^{\alpha\beta}$ unabhängige Variable aufzufassen.

Zeigen Sie, daß sich aus der Variation der Lagrangedichte (1) nach der Metrik die Feldgleichungen ergeben, während die Variation nach dem Zusammenhang $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ den Christoffelsche Zusammenhang zwischen $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ und der Metrik $g^{\alpha\beta}$ ergibt:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \quad (7)$$

Beachten Sie folgende Hinweise:

- $g^{\mu\nu}$, sowie L_R hängen nicht vom affinen Zusammenhang $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ab.
- Bei der Variation nach den $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ behält Gleichung (4) natürlich ihre Gültigkeit!
- Wandeln Sie das auch hier auftretende Integral (3) **nicht** in ein Oberflächenintegral um!
- Bei realisierbaren Feldkonfigurationen gilt stets: $\delta S = 0$
- Es wird Torsionsfreiheit vorausgesetzt: $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$
- Daß der Raum metrisch ist, also $\nabla_\alpha g_{\lambda\mu} = 0$ gilt, ist ein Ergebnis der Palatini-Variation und darf NICHT vorausgesetzt werden.

Linearisierte Feldgleichungen

Der metrische Tensor lässt sich stets in die Minkowskimetrik η und einen Rest h zerlegen:

$$g_{\alpha\lambda} = \eta_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}$$

Zeigen Sie, dass, unter der Annahme $|h_{\alpha\lambda}| \sim |h_{\alpha\lambda,\beta}| \sim |h_{\alpha\lambda,\beta,\gamma}| \ll 1$, die Feldgleichungen in erster Näherung die Gestalt

$$h_{\rho,\mu,\nu}^\rho + h_{\mu\nu,\rho}^\rho - h_{\mu\rho,\nu}^\rho - h_{\nu,\rho,\mu}^\rho = -\frac{16\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T \eta_{\alpha\beta})$$

annehmen.

Wie lassen sich auf der linken Seite die Summanden bis auf $h_{\mu\nu,\rho}^\rho$ eliminieren? Zeigen Sie, dass sich eine inhomogene Wellengleichung ableiten lässt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!
Die Ausarbeitung ist handschriftlich anzufertigen!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de