

6. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Montag, den 03. Juni 2019 vor der Übung
 Ausgabe: Montag, den 20. Mai 2019

Insgesamt 10 Punkte

Aufgabe 1: Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle II

Nach der auf dem 5. Übungsbogen berechneten Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors der freien Gravitationswelle vom Ricci-Tensor 2. Ordnung ist nun dessen Bestimmung notwendig.

a) Zeigen Sie, dass

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = \eta^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(2)} - h^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(1)} \quad (1)$$

für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ gilt!

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1), der Definition des Krümmungstensors

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + g_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\mu,\nu}) + g_{\eta\sigma}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) \quad (2)$$

und den Christoffelsymbolen 1. Ordnung (Warum?)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(h^{\sigma}{}_{\mu,\nu} + h^{\sigma}{}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\sigma}), \quad (3)$$

dass der Ricci-Tensor 2. Ordnung die Form

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = -\frac{1}{4}(h_{\sigma\kappa,\nu} + h_{\sigma\nu,\kappa} - h_{\kappa\nu,\sigma})(h_{\mu}{}^{\sigma,\nu} + h^{\sigma\nu}{}_{,\mu} - h_{\mu}{}^{\nu,\sigma}) - \frac{h^{\lambda\nu}}{2}(h_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + h_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\lambda\kappa,\mu,\nu}). \quad (4)$$

hat. Es ist dabei zu beachten, dass $h_{\mu\nu}$ Lösung der freien Wellengleichung ist für die die Eichbedingung $2h^{\nu}{}_{\mu,\nu} = h^{\nu}{}_{\nu,\mu}$ gilt. Ansonsten Terme höherer Ordnung vernachlässigen.

Aufgabe 2: Relativistische Kosmologie

In der relativistischen Kosmologie werden einige Grundannahmen getätigt, die dazu führen, dass man sich in der Hauptsache mit Geometrien beschäftigt, welche eine maximale Symmetrie aufweisen.

Diese Geometrien werden durch die sogenannten Robertson-Walker-Metriken beschrieben:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[\frac{1}{1 - \epsilon \frac{r^2}{r_0^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (5)$$

Dabei ist r_0 eine willkürliche Konstante. ϵ charakterisiert die Geometrie. Es werden drei Fälle unterschieden: Im Falle von $\epsilon = 0$ ist der Raum euklidisch, bei $\epsilon = -1$ ist der Raum offen mit negativer Krümmung und bei $\epsilon = +1$ ist er geschlossen mit positiver Krümmung.

Berechnen Sie die zur Robertson-Walker-Metrik passenden Christoffelschen Symbole, sowie damit dann den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar.

Nehmen Sie weiter an, dass der Energie-Impuls-Tensor durch den eines idealen Fluids gegeben ist:

$$T^{ik} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2 \delta_0^i \delta_0^k - p g^{ik} \quad \text{mit} \quad p = p(t) \quad \text{und} \quad \rho = \rho(t) \quad . \quad (6)$$

Dabei haben wir angenommen, dass sich die Materie auf zeitartigen Geodäten bewegt, die mit den zeitartigen Koordinatenlinien zusammenfallen. Daher gilt: $u^i = c \delta_0^i$.

Vereinfachen Sie die Einsteinschen Gleichungen jetzt so weit wie möglich. Sie werden dann feststellen, dass diese sich auf die Friedmannschen Gleichungen reduzieren ($k := \epsilon/r_0^2$):

$$\frac{3}{S^2} \left(\dot{S}^2 + k \right) = \kappa \rho c^2 \quad , \quad (7)$$

$$\frac{1}{S^2} \left(2S\ddot{S} + \dot{S}^2 + k \right) = -\kappa p \quad . \quad (8)$$

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de