

Prof. Dr. Sabine Klapp  
Dr. Mohsen Khadem

## 1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Kolloidsysteme

**Abgabe: Di. 23.04.2019 In der Vorlesung.**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es die Punkte. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

### Aufgabe 1 (6 Punkte): Ideales Gas

Betrachten Sie das klassische ideale, d.h. wechselwirkungsfreie Gas, bestehend aus  $N$  Atomen (hier: Massenpunkte) im Volumen  $V$ . Da die genaue Gestalt des „Gefäßes“ beim idealen Gas keine Rolle spielt, kann das endliche Volumen z.B. durch einen Kubus der Kantenlänge  $L$  realisiert werden.

- (i) Formulieren Sie den Hamiltonian.  
*Hinweis:* Die Zwangsbedingung des endlichen Volumens kann durch ein geeignetes Potential  $V(\mathbf{r})$  realisiert werden.
- (ii) Berechnen Sie das Phasenvolumen  $\Gamma_N(E, V) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_{H < E} d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N$ .
- (iii) Berechnen Sie die Entropie  $S(E, V, N)$ . Verwenden Sie dabei die Stirling-Formel, um den auftretenden Logarithmus-Term zu vereinfachen.
- (iv) Leiten Sie einen exakten thermodynamischen Ausdruck für die innere Energie des idealen Gases (auch „kalorische Zustandsgleichung“ genannt) her.
- (v) Berechnen Sie den Druck  $P(T, V, N)$  und leiten Sie damit die dazugehörige thermische Zustandsgleichung des idealen Gases her.

### Aufgabe 2 (10 Punkte): Gibbs-Bolgoliubov-Ungleichung

Gegeben sei der Hamiltonian  $\mathcal{H}$  eines klassischen Fluidsystems. Im kanonischen Ensemble ist die Freie Energie für dieses System definiert durch

$$\mathcal{F} = -k_B T \ln Z$$

mit der kanonischen Zustandssumme

$$Z = \iint d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N \exp(-\beta \mathcal{H}), \quad \beta = 1/(k_B T).$$

Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , wobei  $V$  das Potential einer *Störung* beschreibt und  $\mathcal{H}_0$  der Hamiltonian des *ungestörten* Systems ist. Die wichtige Gibbs-Bolgoliubov-Ungleichung lautet nun

$$(1) \quad \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_0 + \langle V \rangle_0.$$

Die Freie Energie ist also stets kleiner oder gleich der Summe  $\mathcal{F}_0 + \langle V \rangle_0$ , wobei  $\mathcal{F}_0$  die Freie Energie des ungestörten Systems ist und  $\langle V \rangle_0$  ist der kanonische Mittelwert von  $V$  in Bezug zum Hamiltonian  $\mathcal{H}_0$ .

Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung (1), indem Sie folgende Schritte abarbeiten:

- (i) Betrachten Sie den Hamiltonian  $\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_0 + \lambda V$ , wobei  $\lambda = [0 \dots 1]$  ein kontinuierlicher Störparameter ist. Damit lassen sich Zustandssumme  $Z = Z(\lambda)$  und Freie Energie  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\lambda)$  als Funktionen des Parameters  $\lambda$  ausdrücken.

1. Übung TP VI SS19

- (ii) Bilden Sie die Taylorreihe der Freien Energie in Potenzen von  $(\lambda_1 - \lambda_0)$ , wobei  $\lambda_1 = 1$  die eingeschaltete Störung beschreibt und  $\lambda_0 = 0$  entsprechend das ungestörte System.
- (iii) Zeigen Sie, dass der in der Reihe auftretende Term linear in  $(\lambda_1 - \lambda_0)$  sich schreiben lässt als

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle V \rangle_0$$

- (iv) Im letzten Schritt zeigen Sie, dass in der Reihe auftretende Term proportional zu  $(\lambda_1 - \lambda_0)^2$  stets negativ ist.

**Aufgabe 3 (4 Punkte): Funktionalableitung**

Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das folgende Potential her

$$F = \int_a^b dx \left[ \frac{c}{2} (\partial_x \psi)^2 + \frac{a\tau^2}{2} \psi(x)^2 + \frac{d}{2} (\partial_x^2 \psi)^2 \right]$$

mit den Randbedingungen  $\psi(a) = \psi_a$ ,  $\psi(b) = \psi_b$ ,  $\partial_x \psi(a) = \psi'_a$  und  $\partial_x \psi(b) = \psi'_b$ . Nehmen Sie an, dass  $\psi(x)$  die stationäre Lösung ist und betrachten Sie das Feld  $\psi_\lambda(x) = \psi(x) + \lambda \epsilon(x)$ , wobei  $\epsilon(x)$  eine Abweichung von der stationären Lösung mit den Randbedingungen  $\epsilon(a) = \epsilon(b) = \partial_x \epsilon(a) = \partial_x \epsilon(b) = 0$  ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Feld  $\psi(x)$  unter der Bedingung, dass  $\partial_\lambda F[\psi_\lambda]|_{\lambda=0} = 0$  gilt.

<b>Vorlesung:</b>	Dienstag 08:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 203 Donnerstag 08:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 203
<b>Tutorium:</b>	TBA
<b>Scheinkriterien:</b>	Mindestens 50% der Übungspunkte Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium Bearbeitung und Vorstellung eines Projekts