

Prof. Dr. Kathy Lüdge
Dr. Alexander Carmele

9. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 24.06.2019 zum Vorlesungsbeginn

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (20 Punkte): Elektron-Phonon-Wechselwirkung

Der Hamiltonoperator eines elektronischen Zweiniveausystems, das an ein phononisches Bad und an ein klassisches externes Feld koppelt, hat die Form:

$$(1) \quad H = \sum_{i=1,2} \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} b_{\alpha}^\dagger b_{\alpha} + \hbar \sum_{\alpha} (g_{\alpha}^{22} - g_{\alpha}^{11}) a_2^\dagger a_2 (b_{\alpha}^\dagger + b_{\alpha}) - \hbar \sum_{i,j=1,2} \Omega_{ij}(t) a_i^\dagger a_j$$

mit den elektronischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_i^{(\dagger)}$ und den entsprechenden Operatoren $b_{\alpha}^{(\dagger)}$ der Phononen in den Moden α . Die Phononenergie ist ω_{α} und die diagonale Elektron-Phonon-Kopplung g_{α}^{ii} . $\Omega_{ij}(t)$ beschreibt die Kopplung an das externe Lichtfeld (mit $\Omega_{ii} = 0$ und $\Omega = \Omega_{12} = \Omega_{21}$).

1. Verwenden Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung, um die Zeitableitung der mikroskopischen Polarisation $p = \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ für den Fall linearer Optik zu bestimmen:

$$\frac{d}{dt} p = -i(\omega_2 - \omega_1 - i\gamma)p + i\Omega - i \sum_{\alpha} \tilde{g}_{\alpha} \left(\langle a_1^\dagger a_2 b_{\alpha} \rangle + \langle a_1^\dagger a_2 b_{\alpha}^\dagger \rangle \right).$$

Hinweis: In linearer Optik ($\Omega \ll 1$) ist $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle \approx 1$ und $\langle a_2^\dagger a_2 \rangle \approx 0$ für den Fall $\omega_1 < \omega_2$. Ferner wurde eine phänomenologische Dephasierungskonstante γ eingefügt.

2. Leiten Sie unter Vernachlässigung der Elektron-Licht Wechselwirkung für die phonon-assistierten Übergangselemente $S_{\alpha} = \langle a_1^\dagger a_2 b_{\alpha} \rangle$ und $T_{\alpha} = \langle a_1^\dagger a_2 b_{\alpha}^\dagger \rangle$ Bewegungsgleichungen her. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{\alpha} &= -i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_{\alpha} - i\gamma)S_{\alpha} - i\tilde{g}_{\alpha} p (n_{\alpha} + 1), \\ \frac{d}{dt} T_{\alpha} &= -i(\omega_2 - \omega_1 - \omega_{\alpha} - i\gamma)T_{\alpha} - i\tilde{g}_{\alpha} p n_{\alpha}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung wurde die Badannahme für die Phononen verwendet, insbesondere $\langle a_i^\dagger a_j b_{\alpha}^\dagger b_{\beta}^\dagger \rangle = \langle a_i^\dagger a_j b_{\alpha} b_{\beta} \rangle = 0$ und $\langle a_i^\dagger a_j b_{\alpha}^\dagger b_{\beta} \rangle = \langle a_i^\dagger a_j \rangle \delta_{\alpha\beta} n_{\alpha}$. Die Besetzung $n_{\alpha} = \langle b_{\alpha}^\dagger b_{\alpha} \rangle$ ist gegeben durch die Bose-Einstein Verteilung $n_{\alpha} = [\exp(\hbar\omega_{\alpha}/(k_B T)) - 1]^{-1}$.

3. Führen Sie eine Fouriertransformation der drei Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Konvention $G(\omega) = \int dt e^{i\omega t} g(t)$ durch.
4. Berechnen Sie $S_{\alpha}(\omega)$ und $T_{\alpha}(\omega)$ und setzen dies in die Gleichung für $p(\omega)$ ein, um den folgenden Ausdruck zu erhalten:

$$p(\omega) = - \frac{\Omega(\omega)}{i\gamma + \omega + \omega_1 - \omega_2 + \sum_{\alpha} \tilde{g}_{\alpha}^2 \left(\frac{n_{\alpha} + 1}{-i\gamma - \omega - \omega_1 + \omega_2 + \omega_{\alpha}} + \frac{n_{\alpha}}{-i\gamma - \omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_{\alpha}} \right)}.$$

9. Übung TFP SS19

5. Wir betrachten nun nur noch eine Phononmode α . Plotten Sie die Absorption $\alpha(\omega) \sim \text{Im}(p(\omega)/\Omega(\omega))$ linear und logarithmisch mit einem Programm Ihrer Wahl (Mathematica, Maple, Matlab, etc.)- inkl. Ausdrucks des Quellcodes der Plotbefehle - für die folgenden Parameter: $\hbar(\omega_2 - \omega_1) = 1.5\text{eV}$, $\hbar\omega_\alpha = 34\text{meV}$, $\hbar g_\alpha = 5\text{meV}$, $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5}\text{eV/K}$, $\gamma = 1\text{meV}$. Verwenden Sie dabei die Temperaturen (i) $T = 300\text{K}$, (ii) $T = 100\text{K}$ und (iii) $T = 0.1\text{K}$. Diskutieren Sie die physikalische Ursache der auftretenden Peaks. Insbesondere welche Prozesse bei welchen Temperaturen eine Rolle spielen. Warum haben Phononen auch einen Einfluß nahe dem absoluten Temperaturnullpunkt auf die Spektren?

Vorlesung:

- Montags 10–12 Uhr im EW 202
- Mittwochs 10–12 Uhr im EW 202

Übungen:

- Mi 16–18 Uhr im EW 229

Scheinkriterien:

- Mindestens 60% der Übungspunkte
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Übungen

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Ashcroft, Mermin, *Festkörperphysik* (Oldenbourg)
- Kittel, *Quantentheorie der Festkörper* (Oldenbourg)
- Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik* (Springer)
- Ibach, Lüth, *Festkörperphysik* (Springer)
- Jäger, Valenta, *Festkörpertheorie* (Wiley)
- U. Rössler, *Solid State Theory* (Springer)
- Haug, Koch, *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* (World Scientific)
- Haken, *Quantenfeldtheorie des Festkörpers* (Teubner)
- Scherz, *Quantenmechanik* (Teubner)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. K. Lüdge	Mi	13-14 Uhr	EW 741
Dr. A. Carmele	Di	11-12 Uhr	EW 704

Hinweise:

Die Übungsblätter werden in der Regel am Montag in der Vorlesung ausgegeben. Die Abgabe erfolgt dann 14 Tage später Montags zu Vorlesungsbeginn.