Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 17. Juni 2019

Prof. Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo, Felix Köster, Alexander Kraft

10. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mo. 24.06.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 26 (10 Punkte): *Zustandsgleichungen fermionischer Quantengase*

Gegeben sei ein dreidimensionales unendliches hohes Kastenpotential mit Kantenlänge L und den Energieniveaus $\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}$, welches mit einem fermionischen Quantengas gefüllt ist.

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass im Grenzfall sehr großer Volumina des Kastens

$$\frac{1}{V}\sum_n f_n = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 f(k)dk$$

gilt, wobei $f_n = f(|k|)$ eine beliebige Verteilungsfunktion ist und der Wellenvektor k_α gegeben ist über $k_\alpha = \frac{\pi}{L}n_\alpha$, mit $\alpha = x, y, z$.

(b) Wir wollen diese Lösung nutzen, um die mittlere Teilchendichte n im großkanonischen Ensemble zu berechnen. Die großkanonische Zustandsdichte eines wechselwirkungsfreien fermionischen Quantengases ist über die Fermi-Dirac-Verteilung durch

$$f(k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k)-\mu)} + 1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchendichte

$$n = N_{int}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} g^+_{3/2}(z)$$

ist, mit den Fermi-Integralen $g^+_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{z^{-1}e^x+1}dx$ und $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ mit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ bzw. $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ und dem internen Freiheitsgrad N_{int}.

(c) Rechnen Sie nun die Energiedichte U/V aus. Ihr Ergebnis sollte heißen

$$\frac{U}{V} = \frac{3}{2}\frac{N_{int}}{\beta}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} g^+_{5/2}(z)$$

(d) Der Grenzfall verschwindender Temperaturen soll betrachtet werden. Dafür muss zunächst das chemische Potential $\lim_{T\to 0}\mu(T) = \mu(0) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ bestimmt werden. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mu(T=0) = \left(\frac{6\pi^2 N}{N_{int}V}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}$$

Bestimmen Sie nun den Druck des Fermi-Gases bei tiefen Temperaturen.

Hinweis: Nutzen sie die ausgerechnete Fermi-Kante k_F, womit sie die innere Energiedichte $\frac{U}{V}$ berechnen können. Bestimmen Sie dann p über $p = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$.

Aufgabe 27 (10 Punkte): *Bose-Einstein-Kondensation*
Analog zu Aufgabe 26 soll nun ein ideales bosonisches Quantengas betrachtet werden.

(a) Wir wollen uns zunächst den naiven Ansatz angucken und feststellen, wo dieser seine Grenzen hat. Gehen Sie also analog zu Aufgabe 26 b) vor und leiten sie die mittlere Teilchendichte n für die Bose-Einstein-Verteilung her, welche gegeben ist durch

$$f(k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k)-\mu)} - 1}.$$

Ihr Ergebnis für die mittlere Teilchendichte n müsste

$$n = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} T^{3/2}\xi(\beta\mu)$$

heißen, wobei $\xi(\beta\mu) = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x e^{-\beta\mu} - 1}$. Wo hat der Ansatz seine Grenzen? Was passiert für niedrige Temperaturen? Denken Sie daran, dass bei veränderter Temperatur die mittlere Teilchendichte konstant sein muss. Außerdem muss für das chemische Potential $\mu < 0$ gelten.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \left(\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \approx 2.6$ und $\int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{-x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist.

(b) Nun wird der Grundzustand separat betrachtet. Dafür wird die Grundzustandsenergie auf $\epsilon_0 = 0$ geeicht. Wir beschränken die $\sum \to \int$ Näherung auf die Teilchen in höheren Niveaus. Leiten Sie wieder die mittlere Teilchendichte n her. Zeigen Sie, dass

$$n = \frac{N_{int}}{V(z^{-1} - 1)} + N_{int}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} g^-_{3/2}(z)$$

Hinweis: Sie können die Integralgrenzen von 0 bis ∞ nehmen, da der Integrand bei kleinen k sehr schnell verschwindet.

(c) Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) für ein spinloses Bosonengas. Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c unter der die Bose-Einstein-Kondensation stattfindet.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  Einzel- und Zweierabgaben nicht akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Gernot Schaller	EW 744	Di, 13-14 Uhr
Dr. Javier Cerrillo	EW 705	Do, 12-13 Uhr
Felix Köster	EW 629	Mo, 15-16 Uhr
Alexander Kraft	EW 269	Mi, 15-16 Uhr