Prof. Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo, Felix Köster, Alexander Kraft

3. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mo. 06.05.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 7 (3+1+1.5+1.5+1+0.5+1.5=10 Punkte): *Mischungsentropie*

(a) Zeigen Sie, dass das volle Differential der Entropie in einem reversiblen Prozess mit idealen Gasen gegeben ist durch

$$dS_{rev} = \frac{đQ_{rev}}{T} = \frac{nc_V^{mol}}{T}dT + \frac{nR}{V}dV.$$

Zeigen Sie zusätzlich, dass

$$S_{rev} = nc_V^{mol} \ln T + nR \ln V + g,$$

wobei g eine von T und V unabhängige Konstante ist. Ist S_{rev} selbst eine extensive Variable?

(b) Betrachten Sie zwei Gasmengen n_1 bzw. n_2 jeweils im Volumen V_1 bzw. V_2. Beide Gase sind in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Zwischen ihnen befindet sich eine Trennwand. Zeigen Sie, dass die Entropie der Gassorte $j \in \{1, 2\}$ gegeben ist durch

$$S_j(n_j, V_j, T) = n_j \left(c_V^{mol} \ln T + R \ln V_j \right) + g.$$

(c) Die Trennwand wird jetzt entfernt, so dass die Gase sich durchmischen und das Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ gemeinsam einnehmen. Dabei bleiben die Gase im Kontakt mit dem Wärmebad. Berechnen Sie die bei der Durchmischung erzeugte Entropie des Gesamtsystems. Ist das ein reversibler Prozess?

(d) Unter der Annahme, dass die beiden Gassorten gleich sind und die selbe anfängliche Dichte $\frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2}$ haben, vereinfachen Sie den Ausdruck der Mischungsentropie und stellen Sie ihn in Abhängigkeit von der Mengen n_1, n_2 und $n = n_1 + n_2$ allein. Diskutieren Sie das Paradoxon des Ergebnisses angesichts der Reversibilität des Prozesses.

(e) Leiten Sie die Stirling-Formel $\ln N! \approx N(\ln N - 1)$ für $N \gg 1$ her.

(f) Betrachten Sie jetzt die geänderte Entropiedefinition

$$S_{rev}^* = nc_V^{mol} \ln T + nR \ln V - nR \ln n + nR(1 - \ln N_A),$$

wobei N_A die Avogadro Konstante ist. Ist S_{rev}^* eine extensive Variable?

(g) Wiederholen Sie Aufgabenteile (c) und (d) anhand S_{rev}^*. Diskutieren Sie ob das Paradoxon jetzt gelöst ist und was das mit dem Konzept der Unterscheidbarkeit der Teilchen mit Aufgabenteil (e) zu tun hat.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 8 (3 Punkte): *Zentrale Momente*

Das Moment ν-ter Ordnung ist gegeben durch $M_\nu = \langle x^\nu \rangle$. Zeigen Sie folgende Relation für die um den Mittelwert verschobenen Momente $\langle (x - \langle x \rangle)^\nu \rangle$:

(a) $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = M_2 - M_1^2$,

(b) $\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$,

(c) $\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$.

Aufgabe 9 (3+4=7 Punkte): *Legendre-Transformation*

Für konkave (oder auch konvexe) Funktionen $f(x)$ kann man die Legendre-Transformierte

$$f^*(u) = f(x(u)) - x(u) \cdot u \qquad \text{mit} \qquad x(u) \;\; \text{aus} \quad \mathrm{d}f = u \cdot \mathrm{d}x$$

definieren. (Siehe Vorlesung)

(a) Zeige Sie, dass d$f^* = -x \cdot$ du und $f^{**} = f$ gilt.
(b) Berechnen Sie explizit die Legendre-Transformierte $f^*(u)$ und deren Rücktransformierte $f^{**}(x)$ (falls sie existiert) der folgenden Funktionen:

- $f_1(x) = \alpha x$,
- $f_4(x) = \beta(x - \gamma)^2$,
- $f_5(x) = x^\alpha/\alpha$,
- $f_3(x) = \exp(\alpha x)$.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
  Einzel- und Zweierabgaben nicht akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
`Prof. Dr. Gernot Schaller`	EW 744	Di, 13-14 Uhr
`Dr. Javier Cerrillo`	EW 705	Do, 12-13 Uhr
`Felix Köster`	EW 629	Mo, 15-16 Uhr
`Alexander Kraft`	EW 269	Mi, 15-16 Uhr