

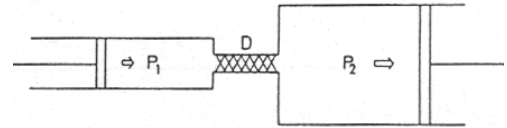
Prof. Dr. Gernot Schaller  
 Dr. Javier Cerrillo, Felix Köster, Alexander Kraft

## 8. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

**Abgabe: Mo. 10.06.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

### Aufgabe 21 (2+2=4 Punkte): Joule-Thomson-Prozess

Ein Zylinder wird durch eine Druckdrossel  $D$  in zwei Teilzylinder geteilt. Auf den beiden Seiten befinden sich Kolben, die Druck aufnehmen oder ausüben können (siehe Skizze), so dass beide Teilzylinder an ein Druckbad gekoppelt sind. Eine bestimmte Gasmenge werde durch  $D$  gepresst.  $p_1$  und  $p_2$  seien die Drücke vor und hinter der Öffnung,  $V_1$  und  $V_2$  die entsprechenden Volumina.



Zu Beginn des Prozesses sei  $V_2 = 0$  und  $V_1 = V$ , am Ende  $V_1 = 0$  und  $V_2 = V$ . Bei dem Prozess entspannt sich das Gas unter Wärmeisolation von dem Druck  $p_1$  auf  $p_2$ .

- (a) Begründen Sie, warum die Enthalpie  $H$  konstant bleibt.
- (b) Die Änderung der Temperatur wird daher durch den Joule-Thomson-Koeffizienten  $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$  bestimmt. Zeigen Sie:  $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{T}{C_p} \left[ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{V}{T} \right]$  und  $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S > \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ .

### Aufgabe 22 (2+1+2+1=6 Punkte): Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf Klassisch und Quantenmechanisch

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens im unendlich hohen Potentialtopf ist im eindimensionalen Fall gegeben durch.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \text{ wobei für das Potential gilt}$$

$$V = \begin{cases} 0 & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, \\ \infty & x < -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} < x \end{cases}$$

- (a) Wir wollen uns zunächst den Grenzfall vom quantenmechanischen zum klassischen System ansehen. Lösen Sie dafür die klassische Zustandssumme des Systems und zeigen Sie, dass das quantenmechanische System im Limes von einem sehr großen Potentialtopf ( $L \rightarrow \infty$ ) auf das gleiche Ergebnis führt.

$$Z_c^{class} = \int e^{-\beta H} d\Gamma \quad Z_c^{qm} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_i}$$

mit den Energieeigenwerten eines Teilchens im Potentialtopf  $\epsilon_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$  und  $d\Gamma = \frac{dpdq}{h}$ .

- (b) Berechnen Sie die Entropie des klassischen Systems. Was können Sie für niedrige Temperaturen feststellen?
- (c) Berechnen Sie nun die Entropie des quantenmechanischen Systems für niedrige Temperaturen. Vergleichen Sie ihren Wert mit dem Ergebnis aus Aufgabe (b).
- (d) Schreiben Sie ein Programm, das die Zustandssumme, Innere Energie und Entropie bei Berücksichtigung der niedrigstens  $N$  Zustände berechnet. Wir rechnen in natürlichen Einheiten, heißt  $\hbar = k_B = 1$ . O.b.d.A kann auch  $m = L = 1$  gesetzt werden. Plotten Sie die drei Größen einmal für eine hohe Temperatur ( $T = 300\text{K}$ ) und einmal für eine niedrige Temperatur ( $T = 1\text{K}$ ). Erläutern Sie ihr Ergebnis.

8. Übung TPIV SS 19

**Aufgabe 23 (10 Punkte): Ising-Modell**

Betrachten Sie das eindimensionale Ising-Modell mit der Hamiltonfunktion

$$H = -2\mu h \sum_{j=1}^N S_j - 2J \sum_{j=1}^N S_j S_{j+1},$$

im äußeren Magnetfeld  $h$ , wobei  $S_j \in \{-1/2, +1/2\}$  für  $j = 1 \dots N$  und  $S_{N+1} = S_1$ .

- (a) Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme schreiben lässt als  $Z = \text{Spur}(A^N)$ , wobei die Matrix  $A$  gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} e^{\beta(\mu h + \frac{1}{2}J)} & e^{-\beta \frac{1}{2}J} \\ e^{-\beta \frac{1}{2}J} & e^{\beta(-\mu h + \frac{1}{2}J)} \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie  $Z$  im Limes  $N \gg 1$  explizit!  
(c) Bestimmen Sie die Magnetisierung  $\langle M \rangle$  sowie  $\langle M^2 \rangle$  für  $|\beta\mu h| \ll 1$ .  
(d) Warum gibt es ohne Magnetfeld keine spontane Magnetisierung für  $T > 0$ ?

**Hinweis:** Es empfiehlt sich die Rechnungen mit dem Computeralgebraprogramm Mathematica zu lösen.

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).  
*Einzel- und Zweierabgaben nicht akzeptiert!*
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Gernot Schaller	EW 744	Di, 13-14 Uhr
Dr. Javier Cerrillo	EW 705	Do, 12-13 Uhr
Felix Köster	EW 629	Mo, 15-16 Uhr
Alexander Kraft	EW 269	Mi, 15-16 Uhr