

Prof. Dr. Gernot Schaller
 Dr. Javier Cerrillo, Felix Köster, Alexander Kraft

9. Übungsblatt – Theoretische Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Abgabe: Mo. 17.06.2019 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Zwei-Niveau-System im großkanonischen Ensemble*

Betrachten Sie ein fermionisches Zwei-Niveau-System (Energien ϵ_1, ϵ_2 , Teilchenzahlen N_1, N_2) mit Hamilton-Operator $\hat{H} = \epsilon_1 \hat{N}_1 + \epsilon_2 \hat{N}_2$, das sich im Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet. Bearbeiten Sie mit Hilfe der Vorlesung die folgenden Fragen:

- (a) Wie lauten die möglichen Vielteilchen-Zustände des Systems in Dirac-Schreibweise? Wie lauten die Einträge der Dichtematrix des Zwei-Niveau-Systems im großkanonischen Ensemble?
- (b) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_{gk}

$$Z_{gk} = Sp \left(e^{-\beta \hat{H} - \mu \hat{N}} \right)$$

des Zwei-Niveau-Systems.

- (c) Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchenzahl $\bar{N} = \langle \hat{N} \rangle$ und das chemische Potential μ nicht unabhängig voneinander sind. Berechnen Sie dazu die mittlere Teilchenzahl $\bar{N} = \langle \hat{N} \rangle$.
- (d) Der Einfachheit halber betrachten wir nun ein um $E = 0$ symmetrisches System mit Energieleveln $\epsilon_1 = -\frac{\epsilon}{2}$ und $\epsilon_2 = +\frac{\epsilon}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mu = 0$ für $\bar{N} = 1$. Plotten Sie $\mu(T)$ für verschiedene \bar{N} . (Hinweis: Lösen Sie den Zusammenhang erst nach $x := \exp(-\beta\mu)$ auf)
- (e) Zeigen Sie die Von-Neumann-Gleichung

$$i \hbar \partial_t \rho_{21} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \rho_{21} + V_{21} (\rho_{11} - \rho_{22})$$

für ein gestörtes System $\hat{H} = \hat{H}_0 + V$ mit Störung V (Dipolkopplung an das elektrische Feld: $V(t) = q \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$), wobei wir uns in der Eigenbasis von H_0 befinden. V erfüllt dabei $V_{11} = V_{22} = 0$. Warum?

Aufgabe 25 (10 Punkte): *Phasenübergang in magnetischen Systemen*

Analog zu gasförmigen Systemen kann man auch in magnetischen Systemen eine thermische Zustandsgleichung ableiten. Für einen Ferromagneten in einem äußeren Magnetfeld B lautet diese:

$$m = \tanh \left(m \frac{T_c}{T} + \beta B \right). \quad (1)$$

Dabei ist m die spezifische Magnetisierung des Ferromagneten, $T_c > 0$ die kritische Temperatur und $\beta = 1/(k_B T)$.

- (a) Die Gl. (1) ist eine implizite Gleichung für die spezifische Magnetisierung und kann nicht einfach nach m aufgelöst werden. Um zu verstehen, ob und welche Lösungen für m existieren, stellen Sie die Gl. (1) ohne ein äußeres Feld ($B = 0$) für Temperaturen $T > T_c$, $T = T_c$ und $T < T_c$ graphisch dar. Interpretieren Sie dies.
- (b) Benutzen Sie Gl. (1) um zu zeigen, dass ohne ein äußeres Feld die spezifische Magnetisierung für Temperaturen $T \lesssim T_c$ durch

$$m \approx \sqrt{3(1 - T/T_c)} \quad (2)$$

genähert werden kann.

9. Übung TPIV SS 19

(c) Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität,

$$\chi_T(B) = \left(\frac{\partial m}{\partial B} \right)_T, \quad (3)$$

in der Nähe der kritischen Temperatur für $B = 0$. Betrachten Sie dabei Temperaturen sowohl oberhalb als auch unterhalb von T_c und berechnen Sie die entsprechenden kritischen Exponenten γ, γ' . Die kritischen Exponenten sind dabei über $\chi_T \propto |\hat{t}|^{-\gamma}$, wobei $\hat{t} = \frac{T-T_c}{T_c}$

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in 3er Gruppen).
Einzel- und Zweierabgaben nicht akzeptiert!
- Regelmäßige, aktive Teilnahme an den Tutorien.
- Bestandene Klausur.

Sprechstunden		
Prof. Dr. Gernot Schaller	EW 744	Di, 13-14 Uhr
Dr. Javier Cerrillo	EW 705	Do, 12-13 Uhr
Felix Köster	EW 629	Mo, 15-16 Uhr
Alexander Kraft	EW 269	Mi, 15-16 Uhr