Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo Moreno Alexander Kraft, Felix Köster

14. Juli 2019

Probeklausur zur Theoretischen Physik IV: Thermodynamik und Statistik

Nachname	
Vorname	
Matrikelnr.	
Studiengang	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Σ**
Punkte	**12**	**9**	**20**	**14**	**55**
erz. Punkte					
Kürzel					

Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens **27.5 Punkte** (50%) erreicht sind.
Ab **22 Punkten** (40%) besteht die Möglichkeit einer Nachklausur.

Bestanden	**Nachklausur**	**Nicht bestanden**

Auf der nächsten Seite finden Sie eine Formelsammlung!
Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet.
Dafür gibt es auch Punkte!
Denken Sie daran: Unsere fleißigen Assistenten geben pausenlos Hilfestellung.

Viel Erfolg!

Formelsammlung:

- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}$

- $\frac{2x^2+3x^3+6x^6}{x^2+x^3+x^6} \approx 3.2$ für $x = 0.836$ wobei $x^2 + x^3 + x^6 \approx 1.62$

- $0.18 \cdot 3.2 \approx 0.58$

- Zahlenwerte des natürlichen Logarithmus:
  $\ln(0.836) \approx -0.18 \quad , \quad \ln(1.62) \approx 0.48 \quad , \quad \ln(3) \approx 1.10$

- eine nützliche Maxwell-Relation:
  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$

- ein Differential:
  $dU = TdS - pdV + \mu dN$

- Das Differential der Entropie $S = S(T, V)$:
  $dS(T, V) = \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$

Aufgabe 1 (4+4+2+2=12 Punkte): *Shannon-Information*

An einem Getränkestand werden 3 verschiedene Getränke angeboten: ein kleines Bier für $K_1 = 2$ Euro, ein großes Bier für $K_2 = 3$ Euro und ein Cocktail für $K_3 = 6$ Euro. An einem Arbeitstag zählte der Verkäufer exakt 100 Kunden und nahm dabei 320 Euro ein. Der Verkäufer würde nun gerne wissen, wie viele Getränke welcher Sorte er an dem Tag verkauft hat. Da er vergessen hat, dies während des Verkaufs zu notieren und auch keine Kenntnis über den anfänglichen Getränkevorrat hat, muss er schätzen.

(a) Wir gehen von einer vorurteilsfreien Schätzung aus. Formulieren Sie die Nebenbedinungen der vorurteilsfreien Schätzung und zeigen Sie mithilfe der Variation, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i für den Verkauf eines bestimmten Getränkes mit Preis K_i durch

$$P_i = \exp(\psi - \lambda K_i)$$

gegeben ist. Hier sind ψ und λ zwei Lagrangeparameter. Wie lautet die Zustandssumme Z? Geben Sie sie (ohne die Zahlenwerte einzusetzen) an.

(b) Bestimmen Sie nun die Zahlenwerte von λ und Z für die gegebene Schätzung und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i explizit an. Es ist hierbei hilfreich $x = \exp(-\lambda)$ zu definieren.

(c) Berechnen Sie die Shannon-Information I der Verteilung.

(d) Welche Verteilung müsste man ohne Kenntnis über die Gesamteinnahmen annehmen? Ist I dann größer oder kleiner als in (c)? Warum?

Aufgabe 2 (1+5+1+2=9 Punkte): *Stirling-Kreisprozess*
Betrachten Sie den sogenannten Stirlingschen Kreisprozess, wobei eine Wärmekraftmaschine (ideales Gas mit Teilchenzahl N) Arbeit gemäß dem folgenden quasi-statischen Zyklus leistet:

- $A \to B$: isotherme Expansion bei der Temperatur T_2 vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2.
- $B \to C$: isochore Abkühlung beim Volumen V_2 von der Temperatur T_2 auf die Temperatur T_1.
- $C \to D$: isotherme Kompression bei der Temperatur T_1 vom Volumen V_2 auf das Volumen V_1.
- $D \to A$: isochore Erwärmung beim Volumen V_1 von der Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2.

(a) Zeichnen und beschriften Sie das p-V-Diagramm für diesen Prozess.

(b) Berechnen Sie für jeden der vier Schritte die Arbeit, die vom/am System geleistet wird und die abgegebene/absorbierte Wärme. Gehen Sie näherungsweise davon aus, dass die Wärmekapazität C_V nicht von der Temperatur abhängt.

(c) Zeigen Sie, dass die vom System während eines Zyklus verrichtete Arbeit

$$W = -Nk_B(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad η durch

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + \frac{C_V(T_2-T_1)}{Nk_B\ln(V_2/V_1)}}$$

gegeben ist. Gehen Sie davon aus, dass keine der abgegebenen Wärmemengen zwischengespeichert und wiederverwertet wird, wie es meist bei technischen Umsetzungen des Stirling-Kreisprozesses der Fall wäre.

Aufgabe 3 (4+2+4+10=20 Punkte): *Statistischer Operator*

Der statistische Operator $\hat{\rho}$ (auch Dichteoperator oder Dichtematrix) ist ein positiv semidefiniter (Eigenwerte ≥ 0) Operator mit Spur 1. Er charakterisiert den Zustand eines quantenmechanischen Systems und kann allgemein in der Form $\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$ geschrieben werden. Hierbei sind $p_i \in [0, 1]$ Gewichte für die nicht notwendigerweise orthonormalen Zustände $\left|\psi_i\right\rangle$. Ein reiner Zustand ist dadurch charakterisiert, dass man den zugehörigen statistischen Operator in der Form $\hat{\rho} = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$ schreiben kann.

(a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}^2\} \leq 1$ erfüllt ist und dass für reine Zustände das Gleichheitszeichen gilt.

Betrachten Sie die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \left|+\right\rangle \left\langle+\right| , \\ \hat{\rho}_2 &= \frac{1}{2} \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \frac{1}{2} \left|-\right\rangle \left\langle-\right| . \end{aligned}$$

Hier bilden $\left|\pm\right\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem und bezeichnen die Zustände eines Spin-$1/2$-Teilchens. Außerdem gilt in dieser Basis $\hat{S}_x \left|\pm\right\rangle = \frac{1}{2} \left|\mp\right\rangle$ und $\hat{S}_z \left|\pm\right\rangle = \pm\frac{1}{2} \left|\pm\right\rangle$ bzgl. der Spinoperatoren $\hat{S}_i$.

(b) Welche dieser Operatoren $\hat{\rho}_i$ genügen der Definition eines statistischen Operators?

(c) Welche dieser statistischen Operatoren $\hat{\rho}_i$ beschreiben ein System in einem reinen Zustand?
Hinweis: Verwenden Sie eine Matrixdarstellung in der Basis $\left|\pm\right\rangle$.

(d) Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle \hat{S}_i \rangle_n = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_n \hat{S}_i\}$ und die Fluktuationen $\langle \hat{S}_i^2 \rangle_n - \langle \hat{S}_i \rangle_n^2$ bzgl. der statistischen Operatoren $\hat{\rho}_n$ aus Teilaufgabe (b).

Aufgabe 4 (4+1+5+4=14 Punkte): *Ideales Gas im kanonischen Ensemble*

Betrachten Sie ein ideales, nicht-wechselwirkendes Gas aus N ununterscheidbaren Atomen unter Einfluss der Fallbeschleunigung g. Die Hamilton-Funktion dieses Systems lautet

$$H(\{\mathbf{p}_n\}, \{\mathbf{q}_n\}) = \sum_{n=1}^{N} H_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n), \quad H_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) = \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} + mgz_n + U(\mathbf{q}_n), \tag{1}$$

mit $\mathbf{q}_n = (x_n, y_n, z_n)$. Hierbei stellt $H_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n)$ einen Ein-Teilchen-Hamiltonian dar und das Potential U schränkt die Bewegung der Teilchen auf das Volumen $V = A \cdot \ell$, mit der Grundfläche A und der Höhe ℓ ein.

(a) Berechnen Sie die Ein-Teilchen-Zustandssumme Z_1 und zeigen Sie, dass diese sich als

$$Z_1 = \frac{A}{\lambda_T^3 \beta mg} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta mg\ell}\right) \tag{2}$$

schreiben lässt. Hiebei ist $\lambda_T = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(mk_BT)}$ die thermische Wellenlänge.
Hinweis: *Nutzen Sie das Gauß-Integral in 3D:* $\int d^3x e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2}$.

(b) Geben Sie die N-Teilchen-Zustandssumme an.

(c) Berechnen Sie die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ mithilfe der Zustandssumme in diesem System. Betrachten Sie den Grenzfall $g \to 0$.

(d) Zeigen Sie, dass die mittlere Höhe eines Teilchens durch

$$\langle z \rangle = \ell \left[\frac{1}{\beta mg\ell} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\beta mg\ell}} \right] \tag{3}$$

gegeben ist.