

1. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Montag, den 10. Mai 2021 vor der Übung
Ausgabe: Montag, den 19. April 2021

Symmetrieeigenschaften von Tensoren I

Zeigen Sie, dass für einen Tensor $T_{\alpha\beta\gamma}$ 3. Stufe gilt:

- (i) Wenn $T_{\alpha[\beta\gamma]} = 0$ und $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$ gilt, dann ist $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$.
- (ii) Wenn $T_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, dann ist $T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.
- (iii) Wenn $T_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$, dann ist $T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta})$.

Symmetrieeigenschaften von Tensoren unter Transformationen

Zeigen Sie unter Benutzung der Transformationsregel für Tensoren und der Definitionen des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils eines Tensors $T_{\alpha\beta}$, dass der symmetrische Anteil und der antisymmetrische Anteil des transformierten Tensors $T'_{\alpha\beta}$ nur Funktionen des jeweiligen Anteils des nicht-transformierten Tensors $T_{\alpha\beta}$ sind.

Symmetrien beim Überschieben

Zeigen Sie, dass stets gilt:

$$T_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)}G^{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]}G^{[\alpha\beta]}. \quad (1)$$

Symmetrieeigenschaften von Tensoren II

- a) Es sei $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein beliebiger Tensor 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften $K_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0$, $K_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0$ und $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = -K_{\gamma\delta\alpha\beta}$. Wieviele unabhängige Komponenten besitzt dieser Tensor im zweidimensionalen Raum und wie lauten diese.
- b) Zeigen Sie, dass für einen Tensor 4. Stufe gilt $T_{\alpha[[\beta\gamma]\delta]} = T_{\alpha[\beta\gamma\delta]}$.
- c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Tensor 3. Stufe $Y_{\alpha\beta\gamma}$ im allgemeinen **nicht** gilt $Y_{\alpha\beta\gamma} = (Y_{(\alpha\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]})$.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de