TU Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Engel
Valentin Flunkert, MSc
Dipl.-Phys.Frank Milde

Projekte zur Einführung in die Theoretische Physik II

Durchführung

Die Projekte beinhalten Aufgaben aus den Bereichen der Elektrodynamik und der Quantenmechanik. Sie sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist. Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung der Aufgabe in einer Dreiergruppe
2. Präsentation der Lösung in einem 15 minütigen Kurzvortrag im Tutorium. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränkt euch deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.
3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation des Lösungswegs. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen euch die BetreuerInnen des jeweiligen Projekts in ihren Sprechstunden für Fragen zur Verfügung. Zusätzliche Termine werden nach Bedarf individuell vereinbart. In den Wochen vor und während der Präsentation wird kein Übungsblatt ausgegeben. Die Bewertung des Projekts erfolgt in zwei Schritten. Der/Die TutorIn, in dessen/deren Tutorium ihr den Vortrag haltet, bewertet den Vortrag. Die Bewertung der schriftlichen Ausarbeitung wird von dem/der BetreuerIn des jeweiligen Projektes vorgenommen. Für den Vortrag und die Ausarbeitung werden jeweils maximal 20 Punkte vergeben.

Gruppeneinteilung: in den Tutorien vom 4.12. bis 8.12.2006
Besprechung mit den Betreuern: im Zeitraum 11.12.2006 bis 12.1.2007
Abgabe der Schriftlichen Ausarbeitungen: bis Dienstag dem 16.1.2007
Projektpräsentation: in den Tutorien vom 22.1. bis 26.1.2007.

Projekt 1 (40 Punkte): *Hertzscher Dipol*

In Aufgabe 6 haben wir uns dem elektrischen Dipol gewidmet. Dabei wurde eine Konfiguration zweier Punktladungen betrachtet, die als symmetrisch zum Ursprung angenommen wurde. Nun wollen wir uns einer technischen Anwendung der Dipolstrahlung zuwenden. Eine lineare Antenne kann man sich genähert als oszillierende Ladungen und Ströme vorstellen. Dieser Hertsche Dipol weist eine charakterische Energieabstrahlung auf. Ziel dieses Projektes ist es, diese Dipolcharakteristik herzuleiten.

1. Vektorpotenzial für oszillierende Quellen

Berechne ausgehend von oszilierenden Strömen $\underline{j}$ und Ladungsdichten ρ das Vektorpotenzial $\underline{A}$. Verwende dabei eine Taylor-Näherung für Ausdrücke wie $\frac{\exp(ik|\underline{r}-\underline{r}'|)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$. Erkläre die Approximation durch eine Aufteilung in Fern- und Nahzone.

2. Fern- und Nahfeldnäherung

Leite aus dem Vektorpotenzial $\underline{A}$ das elektrische Feld $\underline{E}$, sowie die magnetische Induktion $\underline{B}$ her. Vernachlässige dabei elektrische Quadrupolterme. Erläutere die Abschätzungen, die für die Fern- und Nahfeldnäherung nötig sind.

3. Energiestromdichte

Aus dem elektrische Feld $\underline{E}$ und der magnetischen Induktion $\underline{B}$ lassen sich Größen wie die Energiedichte ω und der Energiestrom $\underline{S}$ (Poynting-Vektor) ableiten. Erkläre diese Größen und stelle die Energieabstrahlung eines Hertzschen Dipols grafisch dar.

Angenommen die Antenne eines Mobilfunknetzes weist diese Dipolcharakteristik auf. Wo wäre man der Energieabstrahlung der Antenne am wenigsten ausgesetzt?

Literaturvorschläge

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 5. Auflage (2000)
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 3rd Edition (1998)
- W. Greiner, *Theoretische Physik Bd.3 Klassische Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage (1991)

Projekt 2 (40 Punkte): *Magnetische Monopole*

Magnetische Einzelladungen wurden 1930 von P. A. Dirac postuliert. Obwohl bis jetzt kein experimenteller Nachweis gelungen ist, wird weiterhin danach gesucht. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass die Existenz magnetischer Monopole in verschiedener Hinsicht den Physikern gut ins Konzept passen würde. In diesem Projekt soll dies näher betrachtet werden.

1. Elektrisch-magnetische Dualität

Erläutere den Begriff der elektrischen Dualität, und stelle den Zusammenhang zu magnetischen Monopolen her. Gelten die Maxwell Gleichungen in der bekannten Form auch, wenn magnetische Monolpole existieren?

2. Quantisierung der elektrischen Ladung

Laut Dirac würde die Existenz nur eines Monopols die Quantisierung der elektrischen Ladung erklären. Um diese Dirac'sche Quantisierungsbedingung zu erläutern, berechne die zeitliche Ableitung des Bahndrehimpulses eines elektrisch gelandenen Teilchens im magnetischen *Coulomb*-Feld eines im Ursprung liegenden magnetischen Monopols. Bestimme hiermit den Gesamtdrehimpuls des Systems, unter der Vorraussetzung, dass dieser eine Erhaltungsgröße ist. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass der Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches und der Gesamtdrehimpuls ein halbzahliges Vielfaches von $\hbar$ sein muss.

3. Experimentelle Grenzen für die Masse des magnetischen Monopols

Wo liegen nach aktuellem Forschgungsstand die experimentell ermittelten Grenzen für die Masse eines magnetischen Monopols?

Literaturvorschläge:

- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*: Kap. *On the Question of Magnetic Monopoles* und *Discussion of the Dirac Quantisation Condition*
- T. Cheng und L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*: Kap. *Dirac's Theroy of Magnetic Poles*
- Greiner, *Theoretische Physik Bd. 3 Elektrodynamik*: Kap. *Die Frage der magnetischen Monopole*
- Allgemeine Einführung in das Thema: `http://hcs.harvard.edu/~jus/0302/song.pdf`
- Sehr nützlich ist auch der Aufsatz `http://www.alteshaus.de/leben/monopole.pdf` zu finden unter `http://www.hergenschultze.de/`

Projekt 3 (40 Punkte): *Numerische Lösungen der Schrödingergleichung*

Achtung: Programmierkenntnisse (MATHEMATICA, C, PYTHON o. ä.) sind erforderlich!

Die zeitabhängige, eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\,\psi(x,t) = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx} + V(x)\right]}_{H}\,\psi(x,t)$$

ist eine partielle Differenzialgleichung im Ort und in der Zeit. Um eine solche Gleichung numerisch auf einem Intervall $x \in I = [-a,a]$ zu lösen, führt man N Stützstellen $x_1,\ldots,x_N$ ein, die äquidistant über das Intervall I verteilt sind, und betrachtet nur noch die Werte der Wellenfunktion an diesen Stützstellen, d.h. $\psi_j(t) := \psi(x_j,t)$. Die Schrödinger-Gleichung wird dadurch zu einem System von N gekoppelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$i\hbar\partial_t\psi_j(t) = \sum_{l=1}^{N} H_{jl}\psi_l(t),$$

wobei die Koeffizienten H_{jl} eine diskretisierte Version des Hamiltonoperators darstellen und die gewählten Randbedingungen berücksichtigen. In Matrixform lässt sich die Gleichung schreiben als

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_{11} & \ldots & H_{1N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ H_{N1} & \ldots & H_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir benutzen ein numerisches Verfahren, um das Differenzialgleichungssystem für einen gegebenen Anfangszustand $\psi(0)$ zu lösen[1].

1. Vorbereitung

1. Macht euch mit dem Euler-Verfahren und dem Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen vertraut.
2. Welche Art von Randbedingungen auf dem Intervall I sind möglich?
3. Wie sehen die Koeffizienten H_{jl} aus? Übersetzt zuerst das Potenzial $V(x)$ in eine diskrete Matrixform und denkt dann darüber nach, was aus einer Ableitung ∂_x wird (Randbedingungen!).

2. Programmierteil

1. Schreibt ein Programm, das eine vektorwertige Differenzialgleichung 1. Ordnung vom Typ (1) mit dem Runge-Kutta-Verfahren (2. oder 4. Ordnung) löst.
2. Testet das Programm z.B. am klassischen harmonischen Oszillator

$$\partial_t\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}.$$

[1] Eine andere Möglichkeit das Gleichungssystem zu lösen besteht darin, die so genannte Fundamentalmatrix

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

zu finden, wobei gilt: $e^A := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$. Damit hätte man für einen beliebigen Anfangszustand $\psi(0)$ sofort die Lösung

$$\psi(t) = U(t)\,\psi(0).$$

Dies ist aber rechnerisch nicht so ohne weiteres möglich (insbesondere für große Werte von N).

3. Schreibt eine Funktion, die für eine beliebige Anzahl von Stützstellen und ein beliebiges Potenzial $V(x)$ die Koeffizientenmatrix H_{jl} ausgibt.

4. Schreibt eine Funktion, die für eine beliebige Anfangswellenfunktion $\psi(x, 0)$ einen normierten Anfangsvektorausgibt.

5. Schreibt eine Funktion, die die Werte der Wellenfunktion in eine Textdatei schreibt bzw. anhängt.

6. Setzt alles zusammen und lasst das Programm für eine Gauß-förmige Anfangswellenfunktion laufen.

7. Benutzt zum Beispiel MATHEMATICA oder GNUPLOT um das zeitliche Verhalten von $|\psi_j(t)|^2$ als Film darzustellen.

3. Physikalische Anwendungen

1. *Dispersion*
   Beobachtet die zeitliche Entwicklung eines Gauß-förmiges Wellenpaketes für verschiedene Impulse p bei $V(x) = 0$.

2. *Tunneleffekt*
   Lasst ein Gauß-förmiges Wellenpaket mit Impuls p auf eine dünne hohe Potentialwand zulaufen. Optimiert die Parameter (N, Δt, Impuls, Höhe und Dicke der Wand), um den Effekt möglichst deutlich zu sehen. Erläutert das Ergebnis.

3. *Kohärente Zustände (Glauber-Zustände[2])*
   Kohärente Zustände verhalten sich fast wie klassische Wahrscheinlichkeitsverteilungen und werden daher auch quasi-klassische Zustände genannt.
   Nehmt als Potenzial einen harmonischen Oszillator $V(x) = \alpha x^2$ an und berechnet den Grundzustand in euren Numerikeinheiten ($\hbar = 1$, etc.). Setzt den Grundzustand in das Potenzial und überprüft, ob er zeitlich konstant bis auf nummerische Fehler bleibt. Verschiebt den Zustand dann etwas zu einer Seite. Was ist zu beobachten? Was ist an dem Verhalten klassisch?

Literaturvorschläge:

- W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterlein, B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Camebridge University Press (1998), Kap. 16.1
  oder: `http://library.lanl.gov/numerical/bookcpdf.html`
- Visual Quantum Mechanics: `http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/vqm/`
- Quantum Physics Online, `http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/en/index.html`

[2]Roy J. Glauber wurde am 8. Dezember 2005 der Nobelpreis für Physik *für seinen Beitrag zur quantenmechanischen Theorie der optischen Kohärenz* verliehen.
Siehe auch: `http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/`

Projekt 4 (40 Punkte): *Spezielle Relativitätstheorie*

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist die Maxwellsche Elektrodynamik bereits Lorentzinvariant, weshalb sie keiner relativistischen Verallgemeinerung bedarf. Im Rahmen dieses Projektes sollen einige der resultierenden Konsequenzen dargestellt werden.

1. Vorbereitung
Erläutere die Viererschreibweise für Vektoren und stelle die klassischen Differenzialoperatoren in der neuen Schreibweise dar. Führe ko- und kontravariante Größen ein und erkläre den Zusammenhang mit dem Skalarprodukt.

2. Maxwell-Gleichungen
Führe die Viererstromdichte $(c\rho, \underline{j})$ und das Viererpotenzial $(\phi/c, \underline{A})$ ein und zeige die Lorentzinvarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum.

3. Relativistische Transformation der Felder
Wie können die elektromagnetischen Felder in der Viererschreibweise formuliert werden? Leite das Transformationsverhalten der Felder her und interpretiere es.

4. Die Felder einer bewegten Punktladung
Berechne das elektrische Feld und die magnetische Induktion einer Punktladung q, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt.

Optionale Zusatzaufgabe
Simuliere mit MATHEMATICA das elektrische Feld einer vorbeifliegenden Punktladung.

Literaturvorschläge:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretischen Physik*, Bd. 4, Springer-Verlag (2002)
- R. Feynman, *Vorlesung über Physik*, Bd. 2, Oldenburg-Verlag, 3. Auflage (2001)
- H. und M. Ruder, *Die spezielle Relativitätstheorie*, Springer-Verlag (1993)
- S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2003)
  oder `http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/`

Projekt 5 (40 Punkte): *Spin*

Achtung: Dieses Projekt erfordert etwas erhöhten mathematischen Aufwand!

In diesem Projekt soll der Spin des Elektrons als Beispiel eines 2-Zustandssystems der Quantenmechanik betrachtet werden. Dazu sollen folgende Teilaufgaben bearbeitet werden:

1. Vorbereitung

Kläre zunächst die Begriffe Zustand, Orthogonalität und Vollständigkeit. Welche Eigenschaft der Quantenmechanik im Gegensatz zur Mechanik wird bei der Bestimmung des Spinzustands eines Elektrons deutlich? Begründe die Einführung komplexer Wahrscheinlichkeitsamplituden.

2. Dirac-Notation

Durch den Übergang zur Dirac-Schreibweise können die Ergebnisse aus 1. mathematisch gefasst werden. Erkläre, warum in dem so entwickelten Kalkül Spinzustände als Elemente eines zweidimensionalen, unitären Vektorraums (über $\mathbb{C}$) und Messapparate durch lineare Abbildungen (Matrizen) beschrieben
werden können.

3. Stern-Gerlach Experiment

Wie wird der Durchgang eines Elektronenstrahls durch einen Spinpolarisator (Stern-Gerlach Experiment) nun beschrieben?

4. Reihenfolge von Messungen

An einem Elektronenstrahl, der im Zustand $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\uparrow\rangle + 3\,|\downarrow\rangle)$ präpariert ist, wird zuerst die Spinkomponente S_x und dann S_z gemessen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Messwerte bei der S_x- und der darauffolgenden S_z-Messung. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn man die Reihenfolge der beiden Messungen vertauscht?

Literaturvorschläge:

- H. Mitter, *Quantentheorie*, Hochschultaschenbücher-Verlag (1969) Kap. 1+2
- Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1990)
- Cohen-Tannoudji et al., *Quantenmechanik*, de Gruyter, Berlin, (1999)
- Nolting, Band 5, Springer, Berlin (2004)

Projekt 6 (40 Punkte): *Der harmonische Oszillator*

Gegenstand des Projektes ist die eindimensionale Bewegung eines Teilchen unter dem Einfluss eines parabolischen Potenzials. Zunächst soll die Bewegung klassisch auf der Basis der Newton´schen Bewegungsgleichung beschrieben werden. Bei der quantenmechanischen Behandlung ist die Schrödinger-Gleichung zu lösen. Dazu soll anstelle der in der Vorlesung eingesetzten Sommerfeld´schen Polynom-Methode das von Dirac vorgeschlagene algebraische Lösungsverfahren angewendet werden, welches allein auf der kanonischen Vertauschungsrelation für den Orts- und den Impulsoperator beruht.

1. Newton'sche Bewegungsgleichung

Diskutieren Sie die Oszillationen eines klassischen Teilchens (Punktmasse m) in $U(x)$. Lösen Sie dazu die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = A$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$. Bestimmen Sie die zulässigen Werte der Gesamtenergie des Oszillators als Funktion der Schwingungsamplitude. Für die Wahrscheinlichkeit, das klassische Teilchen im Zeitintervall dt an einer Position x aus dem Intervall $(x, x + dx)$ anzutreffen, gilt

$$w^{kl}\,dx = \begin{cases} \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} & \text{für } |x| \le A \text{ (klassisch erlaubter Bereich)} \\ 0 & \text{für } |x| > A \text{ (klassisch verbotener Bereich)} \end{cases} \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Relation.

2. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Energiespektrum

Führen Sie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein und zeigen Sie, dass das Energiespektrum E_n diskret und äquidistant ist

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Interpretieren Sie die Bezeichnungen Erzeugungs- und Vernichtungsoperator für $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$.

3. Wellenfunktion

Beweisen Sie für die Wellenfunktionen die Darstellung

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\psi_0(x). \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die $\psi_n(x)$ abwechselnd gerade und ungerade sind und der Quotient $\psi_n(x)/\psi_0(x)$ ein Polynom n-ter Ordnung in x ist. Stellen Sie Wellenfunktionen und die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten für $n = 0, 1, 2$ und 3 grafisch dar. Vergleichen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für große Quantenzahlen n mit dem Ergebnis (1) für klassische Teilchen. Zusatz: Beweisen Sie mit Hilfe von (3) die in der Vorlesung abgeleitete Darstellung der Wellenfunktionen über die Hermite´schen Polynome

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Literaturvorschläge

- Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1990); Kap. 3
- Cohen-Tannoudji et al., *Quantenmechanik*, de Gruyter, Berlin, (1999); Kap. 5
- Nolting, Band 5, Springer, Berlin (2004), Kap. 4.4