10. Januar 2007

Prof. Dr. H. Engel
Valentin Flunkert, MSc
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/etp2_ws2006.html
Tutoren: Sibylle Anderl, Sebastian Brandstetter, Christopher Wollin

10. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: bis Dienstag 30.1.2007 14:00 Uhr im Briefkasten im Physik Altbau/Ernst-Ruska Bau.

Aufgabe 20 (7 Punkte): *Hermitesche Operatoren*

Wir betrachten den Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der komplexen quadratintegrierbaren Funktionen (von einer reelen Variablen) in dem das Skalarprodukt definiert ist durch

$$(\psi, \phi) := \int_{\mathbb{R}} dx \, \overline{\psi(x)} \, \phi(x) \qquad \psi, \phi \in \mathcal{H}.$$

Zu jedem Operator A (lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$) existiert ein Operator $A^\dagger$ so, daß gilt

$$(\psi, A\phi) = (A^\dagger \psi, \phi)$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} dx \, \overline{\psi(x)} \, A \, \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \, \overline{(A^\dagger \, \psi(x))} \phi(x).$$

$A^\dagger$ heisst der *adjungierte* Operator von A.

(a) Beweisen Sie: $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ und $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

(b) Zeigen Sie, dass der Operator $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ selbstadjungiert (Hermitesch) ist, d.h. es gilt $H = H^\dagger$. [1]

Aufgabe 21 (7 Punkte): *Erwartungswerte*
Quantenmechanische Messgrößen (Observablen) sind Zufallsvariablen. Daher ist der experimentell zugängliche Mittelwert (Erwartungswert) einer Observablen $\langle A \rangle = \int d^3 r \psi^* A \psi$ eine wichtige Größe. Am Beispiel der Grundzustandswellenfunktion $\psi(\underline{r})$ des Wasserstoffatoms

$$\psi(\underline{r}) = (\pi a_B^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|\underline{r}|}{a_B}}; \quad a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

soll folgendes berechnet werden:

(a) $\int d^3 r |\psi(\underline{r})|^2$

(b) $\langle \underline{r} \rangle$; $\langle \underline{r}^{\,2} \rangle$

(c) $\langle \underline{p} \rangle$; $\langle \underline{p}^{\,2} \rangle$

(d) $\Delta r \Delta p$

Hinweis: Zur Lösung der Integrale sind Kugelkoordinaten zweckmäßig. Zur Berechnung der Varianz Δx (mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert) zeigen Sie zunächst $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ und verwenden Sie dann die Ergebnisse von 2. und 3.

[1] Eigentlich wird hier nur gezeigt, dass H formal symmetrisch ist. Für die Selbstadjungiertheit müsste man auch zeigen, dass die Definitionsbereiche von H und $H^\dagger$ gleich sind.

Aufgabe 22 (6 Punkte): *Kommutatoren*

Physikalische Messgrößen (Observable) werden in der QM durch Operatoren beschrieben, bei denen die Reihenfolge der Ausführung im Allgemeinen nicht beliebig ist.
Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ nimmt daher eine zentrale Position in der QM ein.

Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

(i) $[p_i, x_j]$ (ii) $[p_i, p_j]$ (ii) $[x_i, x_j]$

wobei $i, j = 1, 2, 3$