23. Januar 2007

Prof. Dr. H. Engel
Valentin Flunkert, MSc
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/etp2_ws2006.html
Tutoren: Sibylle Anderl, Sebastian Brandstetter, Christopher Wollin

11. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: bis Dienstag 06.02.2006 14:00 Uhr im Briefkasten im Physik Altbau/Ernst-Ruska Bau.

Aufgabe 23 (10 Punkte): *Wiederholung: Bewegung im Zentralpotential*

Im letzten Semester wurde bereits im Zusammenhang mit dem Kepler-Problem die Bewegung in einem Zentralkraftfeld betrachtet. In Vorbereitung auf das Wasserstoff-Problem in der Quantenmechanik, das ebenfalls als eine Bewegung im Zentralfeld beschrieben werden kann, sollen in dieser Aufgabe charakteristische Eigenschaften des Kepler-Problems wiederholt werden. Dies soll mit Hilfe eines Java-Applets geschehen:

1. Begeben Sie sich auf die folgende Website:

   `http://www.isis.tu-berlin.de/mod/lesson/view.php?id=7769`

2. Beantworten Sie die gestellten Fragen und **notieren** Sie die gegebenen Antworten auf Ihrem Lösungszettel. Bei einigen Aufgaben soll etwas graphisch dargestellten werden. Speichern Sie dazu die entsprechenden Daten-Files und plotten Sie sie mit einem Programm Ihrer Wahl (Gnuplot, Mathematica, Excel, etc.).

3. Nachdem Sie alle Fragen beantwortet haben, begeben Sie sich nun auf die folgende Website:

   `http://ofb.msd-media.de/emodule/`

   Damit wir in Zukunft wissen, was bei Online-Aufgaben besser gemacht werden kann, soll eine Evaluation dieses sogenannten `eModuls` vorgenommen werden.

Aufgabe 24 (10 Punkte): *Wasserstoffradialfunktion zu maximalem Drehimpuls*

Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen mit maximalem Drehimpuls $l = n - 1$ sind von der Form $\psi_{n,n-1,m}(\mathbf{r}) = (u_{n,n-1}(r)/r)Y_{n-1,m}(\vartheta, \varphi)$ mit

$$u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2Z}{n\,(2n)!a_B}}\left(\frac{2Zr}{na_B}\right)^n \exp\left(-\frac{Zr}{na_B}\right)$$

Dabei ist $a_B = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_e e^2)$ der *Bohrsche Radius*.

1. Bestimmen Sie das Maximum r_{max} der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$

2. Vergleichen Sie r_{max} mit dem Erwartungswert $\langle r\rangle$

Im Bohr'schen Atommodell werden Kreisbahnen betrachtet (Radius r). Dabei wird die Coulombkraft gleich der Zentripedalkraft gesetzt

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r},$$

und der Drehimpuls wird gemäß $m_e vr = n\hbar$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ quantisiert.

3. Vergleichen Sie die sich hierfür ergebenden Radien mit den oben berechneten Werten von r_{max}.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Bonusaufgabe 25 (10 Zusatzpunkte): *Spezielle Funktionen*

Neben den Hermiteschen Polynomen, welche bereits in der Vorlesung im Zusammenhang mit dem harmonischen Oszillator behandelt wurden, gibt es noch weitere spezielle Funktionen. Diese sollen nun im Folgenden betrachtet werden.

1. Betrachten Sie die *Legendre-Polynome 1.Art*:

$$P_l\left(x\right) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$$

welche Lösung zur Legendre-Gleichung

$$\left(x^2-1\right)P_l'' - 2xP_l' + l\left(l+1\right)P_l = 0$$

sind. Berechnen Sie die ersten fünf *Legendre-Polynome* $P_l(x)$ und skizzieren Sie diese.

2. Die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ sind über die sogenannten *zugeordneten Legendre-Polynome* $P_l^m(x)$ (man beachte den weiteren Index m) durch

$$Y_{lm}\left(\vartheta,\varphi\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m\left(\cos\vartheta\right)e^{im\varphi}$$

definiert. Zeigen Sie deren Orthonormalität, d.h. zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi d\vartheta\,\sin\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*\left(\vartheta,\varphi\right)Y_{l'm'}\left(\vartheta,\varphi\right) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$$

gilt. Setzen Sie dabei die Orthogonalität der *zugeordneten Legendre-Polynome*

$$\int_0^1 dx P_l^m\left(x\right)P_{l'}^m\left(x\right) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{l,l'}$$

voraus.