28. November 2006

Prof. Dr. H. Engel
Valentin Flunkert, MSc
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/etp2_ws2006.html
Tutoren: Sibylle Anderl, Sebastian Brandstetter, Christopher Wollin

7. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: bis Dienstag 12.12.2006 14:00 Uhr im Briefkasten im Physik Altbau/Ernst-Ruska Bau.

Aufgabe 13 (5 Punkte): *Fourieranalyse*

Eine Funktion f kann nicht nur durch eine Taylor-Reihen approximiert werden (also mit Polynomen von x, welche eine Basis im Funktionenraum darstellen), sondern auch mittels trigonometrischer Funktionen (welche ebenfalls eine ONB bilden). Die letztere Entwicklung nennt man Fourier-Reihe. Dazu vorab einige Definitionen:

Eine Funktion f heißt *periodisch* mit der Periode $p \neq 0$, wenn gilt:

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eine p-periodische Funktion f ist dann eindeutig bestimmt durch ihr Verhalten auf einem beliebigen Intervall der Länge p. Es werden definiert:

Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right)dx \qquad\qquad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right)dx$$

Fourierreihe von f

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right)\right)$$

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } \ 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{für } \ 1 \le x < 2 \end{cases} \qquad\qquad \text{dabei sei } \ f(x+2) = f(x)$$

und

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x-\pi) & \text{für } \ -\pi \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{x}{2} & \text{für } \ |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x+\pi) & \text{für } \ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases} \qquad\qquad \text{dabei sei } \ g(x+2\pi) = g(x).$$

1. Berechnen Sie die vollständige Fourier-Reihe von f und g.

2. Plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl sowohl f und g, also auch die N-te Partialsumme der Fourier-Reihe für $N = \{1, 2, 3, 20\}$.

7. Übung ETPII WS2006/07

Aufgabe 14 (5 Punkte): *Fouriertransformation*

Die Fourier-Transformation bildet eine große Klasse von Funktionen $f(x)$ auf andere Funktionen $g(k)$ ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen x und k. Anschaulich kann man die Fourier-Transformation als eine Zerlegung der Funktion $f(x)$ in (ebene) Wellen ansehen, die Funktion $g(k)$ gibt dabei die Amplitude der zur Wellenzahl k gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die Fourier-Transformation zahlreiche Anwendungen.
Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$\begin{aligned} g(k) &= FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= FT^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

1. Beweisen Sie, das Ableitungen bei Fouriertransformation in Multiplikation mit k übergehen:
$$FT\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = ikFT\left(f(x)\right)$$
Tipp: Nehmen Sie dazu an, dass $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$.

2. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte eines Gaußpaketes der Breite a:$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$.
Welche Breite besitzt die Fouriertransformierte?
Tipp: Benutzen Sie hierzu, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\alpha(x+i\beta)^2] = \sqrt{\pi/a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,welches sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten läßt.

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Wellenausbreitung in elektrischen Leitern*

Betrachten Sie einen elektrischen Leiter, in dem es nicht nur die Verschiebungsstromdichte, sondern auch die Leitungsstromdichte $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ mit der elektrische Leitfähigkeit $\sigma \neq 0$ gibt.

(a) Formulieren Sie die Maxwell'schen Gleichungen für die physikalisch relevanten Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in diesem Medium ($\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$).

(b) Zeigen Sie ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, dass das elektrische Feld in dem Leiter durch die so genannte *Telegraphengleichung*
$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$
beschrieben wird.

(c) Betrachten Sie
$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, k = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$$
als Lösungsansatz für die eindimensionale Telegraphengleichung (Wellenausbreitung in z-Richtung). Berechnen Sie α und β als Funktion von σ. Wie lauten α und β im Grenzfall $\sigma \to 0$?
Hinweis zum Vergleich: Die Gleichung für α hat folgende Form: $\alpha^4 + a\,\alpha^2 + b = 0; a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Stellen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(z,t)$ für $t = 0$ graphisch dar und interpretieren sie α und β anhand der Skizze. Vergleichen Sie weiterhin die Welle im Leiter mit einer Welle gleicher Frequenz im Vakuum in Bezug auf die Wellenlänge und die Phasengeschwindigkeit (ω/α).