12. Dezember 2006

Prof. Dr. H. Engel
Valentin Flunkert, MSc
Dipl.-Phys. Frank Milde

www.itp.tu-berlin.de/etp2_ws2006.html

Tutoren: Sibylle Anderl, Sebastian Brandstetter, Christopher Wollin

# 9. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

**Abgabe:** bis Dienstag 08.01.2006 14:00 Uhr im Briefkasten im Physik Altbau/Ernst-Ruska Bau.

**Aufgabe 18 (10 Punkte):** *Eindimensionaler harmonischer Oszillator*

*Eine Familie von Funktionen kann definiert werden durch die Differentialgleichungen, die sie erfüllt. Eine dieser Familien bilden die Hermitesche Polynome, welche in der quantenmechanischen Beschreibung konservativer Systeme, die sich fast im Gleichgewichtszustand befinden, auftreten. Diese sollen nun im Folgenden betrachtet werden.*

1. Beweisen Sie, dass der in der Vorlesung verwendete Ansatz für die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung mit der Sommerfeld'schen Polynommethode

$$\Psi_n(y) = H_n(y) \exp\left(-y^2/2\right) \ , \ \text{mit } y := \frac{x}{b} \text{ und der Oszillatorlänge } \quad b := \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$$

für $H_n(y)$ auf die sogenannte *hermitesche* Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy} + 2n\right) H_n(y) = 0$$

führt. Zeigen Sie, dass die Lösung in der Form

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \left(\frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}\right)$$

dargestellt werden kann (*hermitesche* Polynome).
*Tipp: Benutzen Sie vollständig Induktion.*

2. Normieren Sie die Wellenfunktionen und beweisen Sie den in der Vorlesung verwendeten Ausdruck

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

*Tipp: Nutzten Sie die Ergebnisse aus (1) um zu zeigen, dass* $\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$.

3. Stellen Sie die Wellenfunktionen des Grundzustandes und der ersten drei angeregten Zustände sowie die entsprechenden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten graphisch dar.

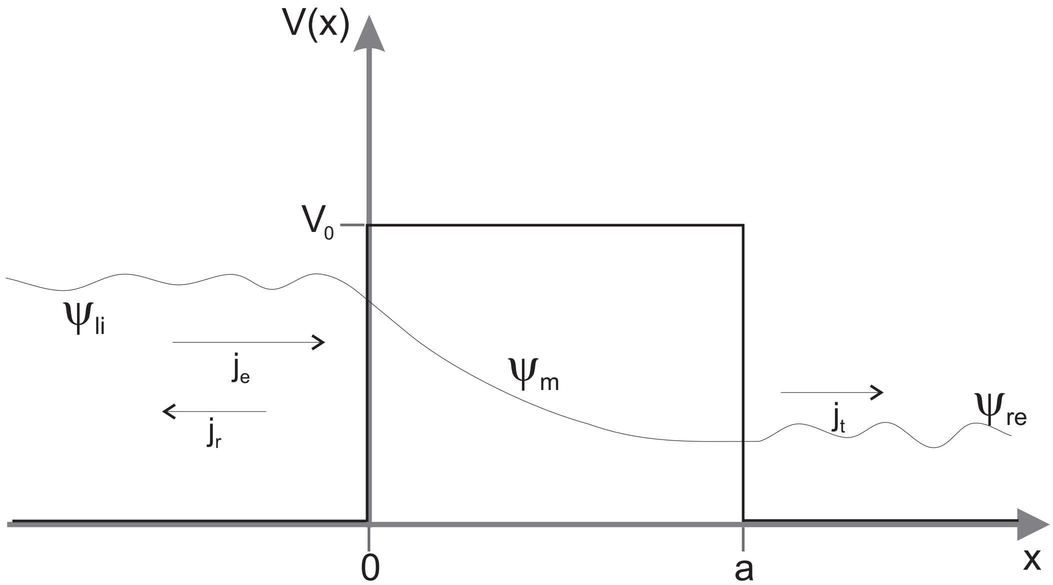
**Bitte Rückseite beachten!** ⟶

**Aufgabe 19 (10 Punkte):** *Tunneleffekt*

Betrachte eine einfache eindimensionale Potentialschwelle:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : 0 < x < a \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Von links laufe eine Welle ein, die teilweise reflektiert, teilweise transmittiert wird.




**(a)** Begründe den Ansatz $\psi_{li}(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} + re^{i(-kx-\omega t)}$, $\psi_{re}(x,t) = te^{i(kx-\omega t)}$ für die Wellenfunktion links, bzw. rechts von der Schwelle. Finde den Zusammenhang zwischen der Energie $E$ der Welle und den Konstanten $k$ und $\omega$.

**(b)** Finde einen Ansatz für die Wellenfunktion $\psi_m(x,t)$ innerhalb der Schwelle und zeige den Zusammenhang einer der auftretenden Konstanten mit der Energie $E$ der Welle. Beachte dabei die Fallunterscheidung für Energien ober- und unterhalb eines gewissen Schwellwertes.

**(c)** Stelle aus den Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion ein lineares Gleichungssystem in den unbekannten Konstanten (Amplituden) auf.

**(d)** Leite einen Ausdruck für das Transmissionsvermögen $T := |j_t|/|j_e|$ her, der nur noch von den Parametern $E$, $V_0$ und $a$ abhängt. Begründe, warum die Definition von $T$ sinnvoll ist. Bemerkung: $j_t$ ist die Stromdichte der transmittierten Welle, $j_e$ die der einfallenden Welle, die zusammen mit der Stromdichte der reflektierten Welle die Gesamtstromdichte links der Schwelle ergibt.

**(e)** Stelle den Transmissionsverlauf in Abhängigkeit von $a$ für die verschiedenen Fälle $E = 0.5V_0$ und $E = 1.5V_0$ graphisch dar. Hierfür darf natürlich auch ein entsprechendes Computerprogramm benutzt werden.