

2. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II

Lagrangeformalismus und Dirac-Gleichung

Abgabe: Montag 30. Oktober 2006 bis 13:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Lagrange-Dichte (Wiederholung)*

a) Leiten Sie aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip

$$\delta \int \mathcal{L}(\psi_i, \partial_\mu \psi_i) d^4x = 0$$

die Bewegungsgleichungen für die Felder ψ_i her (Lagrange-Gleichungen 2. Art). Die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}(\psi_i, \pi_i)$ ist dann gegeben durch

$$\mathcal{H}(\psi_i, \pi_i) = \sum_i \pi_i \partial_t \psi_i - \mathcal{L},$$

wobei

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi_i)}$$

der Feldimpuls ist. Lassen Sie sich bei der Herleitung von der VL Mechanik leiten.

b) Gegeben sei die folgende Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi^*) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi) - \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \partial_t \psi - (\partial_t \psi^*) \psi) - \psi^* V \psi.$$

Bestimmen Sie die zugehörige Bewegungsgleichung und die Hamilton-Dichte. Um welches Feld handelt es sich?

Aufgabe 6 (4 Punkte): *Helizitätsoperator*

Zeigen Sie, dass der Helizitätsoperator

$$\Lambda = \vec{S} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

und der freie Dirac-Hamilton-Operator

$$H = \left(c \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & \vec{0} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{0} & 0 \\ 0 & -\underline{1} \end{pmatrix} \right)$$

vertauschen. Was bedeutet dieses bezüglich der Eigenvektoren der Operatoren?

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 7 (6 Punkte): *Dirac-Koeffizienten*

In der Vorlesung haben Sie u.a. durch den Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung Bedingungen, die die Dirac-Koeffizienten α^k , β erfüllen müssen, hergeleitet.

Verifizieren Sie, dass die folgenden Koeffizienten diese Bedingungen erfüllen:

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & -\underline{1} \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sind also folgende Eigenschaften zu zeigen:

- α^k , β sind hermitesche Matrizen.
- $\alpha^l \alpha^k + \alpha^k \alpha^l = 2\delta_{kl} \underline{1}$.
- $\alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0$.
- $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \underline{1}$.
- $Sp(\alpha^k) = 0$.

- **Wichtig: Online-Anmeldung bis Freitag, 20.10., 13 Uhr** unter https://www.itp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/anmeldung.py?id=ws06_tp2
- **Internetseite der Veranstaltung:** <http://www.itp.tu-berlin.de/tpii-ws06.html>
- **Vorlesung:** Mittwoch 12:15 - 14:00 Uhr und Freitag 10:15 - 12:00 Uhr im PN 203
- **Ergänzungen zur Quantenmechanik:** Das erste Treffen zur Terminvereinbarung findet am Mittwoch, 25. Oktober um 8:30 Uhr im Raum P 164 statt.
- **Literatur:**
 - U. Scherz, Quantenmechanik - Eine kompakte Einführung (Teubner, 2005)
 - R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, Feynman Vorlesungen über Physik, Band 3, Quantenmechanik (Oldenburg, 2001)
 - W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 und 5/2 (Springer, 2002)
 - F. Schwabl, Quantenmechanik I+II (Springer 1993)
 - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Quantenmechanik 1 und 2 (de Gruyter 1999)
- **Tutorien:** Es werden 5 der folgenden 7 Termine angeboten:
 - Dienstag 8:15 - 10:00 Uhr im P-N 229
 - Mittwoch 10:15 - 12:00 Uhr im P-N 246
 - Mittwoch 14:15 - 16:00 Uhr im P-N 226
 - Donnerstag 10:15 - 12:00 Uhr im P-N 229
 - Donnerstag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 114
 - Donnerstag 14:15 - 16:00 Uhr im E-N 187
 - Freitag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 226
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur
- **Sprechstunden:** Prof. Dr. A. Knorr Di, 13:00 - 14:00 Uhr PN 742
Die restlichen Sprechstunden werden nach Einteilung der Tutorien bekanntgegeben.
- **Klausur:** Mittwoch, 7. Februar 2007, 12:00 - 14:00. Raum wird noch bekannt gegeben.
- **Mathematica-Kurs:** <http://www.physik.tu-berlin.de/pcpool/kurse/mathematica/>