Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Jens Förstner
Dipl-Phys. Jan Schlesner, Dipl-Phys. Philipp Zedler
Janis Nötzel

31. Oktober 2006

www.itp.tu-berlin.de/tpii-ws06.html

3. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II
Spin

Abgabe: Montag, 6. November 2006 bis 13:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 8 (6 Punkte): *Spin und Drehimpuls*
Der Spin eines Teilchens wird interpretiert als dessen innerer Drehimpuls. Wir machen uns das plausibel, indem wir folgende vier Relationen für die Spinmatritzen beweisen, die wir vom Drehimpuls her kennen. Dabei verwenden wir die Paulimatritzen, die folgendermaßen aussehen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei gilt für die Spinmatritzen $\hat{s}_i$, dass $\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

(8.1) Zeige, dass $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$.

(8.2) Zeige, dass $[\sigma^2, \sigma_i] = 0 \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Sei χ_{sm_s} ein Spinor mit Spin $s = 1/2$ und der z-Komponente m_s des Spins. Wir verwenden den einfachsten Spinor:

$$\chi_{s,1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_{s,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(8.3) Zeige: $\vec{s}^2\chi_{sm_s} = \hbar^2 \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\chi_{sm_s}$.

(8.4) Zeige: $s_z\chi_{sm_s} = \hbar m_s \chi_{sm_s}$.

Aufgabe 9 (4 Punkte): *Skalarprodukte mit Paulimatritzen*
Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit drei Skalaren als Einträgen. Der Spin $\vec{\sigma}$ ist ein Vektor mit den drei Pauli-Matritzen als Einträgen. Zeige, dass folgendes gilt:

$$(\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}})(\vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}}) = \hat{1}(\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\vec{\hat{\sigma}}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Aufgabe 10 (6 Punkte): *Dirac-Hamiltonian und Drehimpulsoperator*
Der Dirac-Hamiltonoperator eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c\hat{\alpha}^k\hat{p}_k + \hat{\beta}mc^2$. Der zugrhörige Spinoperator ist gegeben als $\hat{\Sigma}^k = \begin{pmatrix} \hat{s}^k & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{s}^k \end{pmatrix}$.

(10.1) Zeige, dass der Drehimpulsoperator $\hat{l} = \hat{r} \times \hat{p}$ nicht mit $\hat{H}$ vertauscht. Nutze dafür die Vertauschungsrelationen der Ort- und Impulsoperatoren.

(10.2) Zeige, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit $\hat{H}$ vertauscht.

(10.3) Zeige, dass der Gesamtdrehimpuls aber doch mit $\hat{H}$ vertauscht.

Aufgabe 11 (4 Punkte): *Wiederholung: Kanonische Transformation der Hamiltonfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld*
Betrachte die Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi.$$

(11.1) Zeige, dass er sich bei Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung in die folgende Lagrange-Funktion transformieren lässt.

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Betrachte die Erzeugende

$$R = -q\vec{r}\cdot\vec{A}(0,t) - \frac{q}{2}\vec{r}\cdot\left[\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right].$$

(11.2) Wiederhole die Aufgabe 11 aus der Mechanikvorlesung des letzten Semesters. Zeige, dass für die transformierte Lagrange-Funktion L' gilt:

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\vec{r}\cdot\vec{E}(0,t) + \frac{q}{2}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(0,t)\right).$$

Vorgehensweise: Entwickele das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r},t)$ aus L um $\vec{r}=0$ bis zur ersten Ordnung. Begründe die Vernachlässigung des Terms, der $\vec{r}\cdot\left[\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right)\partial_t\vec{A}(\vec{r},t)\right]$ enthält. Fasse danach alle aus der Vorlesung für die Diplonäherung bekannten Terme zusammen und zeige, dass für die restlichen Ausdrücke gilt:

$$\frac{q}{2}\left\{\dot{\vec{r}}\cdot\left[\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right] - \vec{r}\cdot\left[\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right]\right\} = \frac{q}{2}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)\cdot\vec{B}(0,t).$$

- **Internetseite der Veranstaltung:** http://www.itp.tu-berlin.de/tpii-ws06.html
- **Vorlesung:** Mittwoch 12:15 - 14:00 Uhr und Freitag 10:15 - 12:00 Uhr im PN 203
- **Ergänzungen zur Quantenmechanik:** Vorlesung von Prof. Muschik, mittwochs von 8:30 bis 10:00 Uhr im Raum P 164
- **Literatur:**
  - U. Scherz, Quantenmechanik - Eine kompakte Einführung (Teubner, 2005)
  - R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, Feynman Vorlesungen über Physik, Band 3, Quantenmechanik (Oldenburg, 2001)
  - W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 und 5/2 (Springer, 2002)
  - F. Schwabl, Quantenmechanik (Springer 1993)
  - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Quantenmechanik 1 und 2 (de Gruyter 1999)
- **Tutorien:** Es werden 5 der folgenden 7 Termine angeboten:
  - Dienstag 8:15 - 10:00 Uhr im P-N 229 (Jan Schlesner)
  - Mittwoch 10:15 - 12:00 Uhr im P-N 246 (Janis Nötzel)
  - Mittwoch 14:15 - 16:00 Uhr im P-N 226 (Janis Nötzel)
  - Donnerstag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 114 (Jens Förstner)
  - Freitag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 226 (Philipp Zedler)
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur
- **Sprechstunden:** Prof. Dr. A. Knorr Di, 13:00 - 14:00 Uhr PN 742
  Die restlichen Sprechstunden werden nach Einteilung der Tutorien bekanntgegeben.
- **Klausur:** Mittwoch, 7. Februar 2007, 12:00 - 14:00. Raum wird noch bekannt gegeben.
- **Mathematica-Kurs:** http://www.physik.tu-berlin.de/pcpool/kurse/mathematica/