Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Jens Förstner
Dipl-Phys. Jan Schlesner, Dipl-Phys. Philipp Zedler
Janis Nötzel

1. Dezember 2006

www.itp.tu-berlin.de/tpii-ws06.html

# 7. Übungsblatt zur Theoretischen Physik II

**Rabi-Oszillationen**

**Abgabe: Montag, 11. Dezember 2006** bis 13:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

**Aufgabe 19** (20 Punkte): *Rabioszillationen im Zwei-Niveau-System*

1. Betrachten Sie ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System, das über das externe zeitabhängige Potential $V_{ij} = -\vec{d}_{ij} \cdot \vec{E}(t)/\hbar$ optisch angeregt wird. Zeigen Sie, daß die Dynamik durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{12} &= i\,(\omega_1 - \omega_2)\,\rho_{12} - i\Omega(t)\,(\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \partial_t \rho_{11} &= -2Im\,[\Omega(t)\rho_{12}] \\ \partial_t \rho_{22} &= +2Im\,[\Omega(t)\rho_{12}] \end{aligned}$$

   Dabei wurden die Rabifrequenz $\Omega(t) = \vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(t)/\hbar$ definiert und bekannte Eigenschaften des Dipolmatrixelementes $\vec{d}_{ij}$ ausgenutzt.
   Interpretieren Sie die auftretenden Grössen physikalisch.

2. Sei die Einhüllende der Rabifrequenz $\tilde{\Omega}(t)$ durch $\Omega(t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}(t)e^{-i\omega_L t} + \tilde{\Omega}^*(t)e^{i\omega_L t}\right)$ definiert, wobei $\omega_L$ gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist. Desweiteren sei $p = \tilde{\rho}_{12} = \rho_{12}e^{i\omega_L t}$. Schreiben die Bewegungsgleichung in diesen langsam rotierenden Grössen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave-Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz streichen. Mit $f = \rho_{22} = 1 - \rho_{11}$ und der Verstimmungsfrequenz $\Delta = \omega_L + \omega_1 - \omega_2$ führt dies zu:

$$\begin{aligned} \partial_t p &= i\Delta p + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(1 - 2f) \\ \partial_t f &= \mathrm{Im}\left(\tilde{\Omega}^*(t)\,p\right) \end{aligned}$$

3. Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ($\Delta = 0$) mit reellem $\tilde{\Omega}(t)$:

   (a) Verifizieren Sie, daß $p(t) = \frac{i}{2}\sin\theta(t)$ mit der Pulsfläche $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}(t')dt'$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist und geben Sie $f(t)$ an.

   (b) Diskutieren Sie die Lösung ausführlich. In welchem Zustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche $\theta$ gerade die Werte $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ und $2\pi$ annimmt?
   [Anfangsbedingung hier und für die folgenden Aufgabenteile: $f(-\infty) = p(-\infty) = 0$.]

   (c) Bestimmen Sie für folgende Pulsformen die analytischen Lösungen und plotten Sie $f(t)$ und $Im[p(t)]$ im Bereich von $t = -10..10ps$ für $\tau = 5ps$ und $A = 3\pi$:

      i. Rechteckpuls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A/\tau & \text{für } -\tau < t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und

      ii. cos-Puls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A\pi/(2\tau)cos(\pi t/\tau) & \text{für } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .

**Bitte Rückseite beachten!⟶**

4. In realen System werden die Kohäherenzen durch Ankopplung an die Umgebung gedämpft, was oft durch eine konstante sogenannte Dephasierungrate $\gamma$ beschrieben werden kann. Damit lautet die erste DGL $\partial_t p = -\gamma p + i\Delta p + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(1-2f)$.

   (a) Lösen Sie diese DGLs numerisch. Dafür steht auf der Webseite ein Java-Applet zur Verfügung (http://www.itp.tu-berlin.de/applet_zna.html). Plotten Sie $f(t)$ und $Im[p(t)]$ für den cos-Puls mit $A = 3.25\pi$, $\tau = 5ps$ für die Fälle $\gamma = 0, \frac{1}{10ps}, \frac{1}{1ps}, \frac{1}{0.1ps}$. Beschreiben Sie Entwicklung für zunehmende Dämpfung.

   (b) (i) Leiten Sie eine explizite analytische Lösung für Fall sehr starker Dämpfung her (d.h. für $\dot{p} \ll \gamma p, \tilde{\Omega}$). (ii) Bestimmen Sie $f(t)$ und $p(t)$ für den Rechteckpuls [ergibt beispielsweise $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{\gamma\tau^2}(t+\tau)\right)$ im Bereich $t = -\tau..0$]. (iii) Vergleichen Sie graphisch mit einer numerischen Lösung für $A = 3.25\pi, \gamma = \frac{1}{0.1ps}, \tau = 5ps$. (iv) Schreiben Sie die Dichtegleichung mit Hilfe von $\rho_{22}$ und $\rho_{11}$ in Form einer Mastergleichung und geben Sie die Ein- und Ausstreuraten an.

- **Internetseite der Veranstaltung:** http://www.itp.tu-berlin.de/tpii-ws06.html
- **Vorlesung:** Mittwoch 12:15 - 14:00 Uhr und Freitag 10:15 - 12:00 Uhr im PN 203
- **Ergänzungen zur Quantenmechanik:** Vorlesung von Prof. Muschik, mittwochs von 8:30 bis 10:00 Uhr im Raum P 164
- **Literatur:**
  - U. Scherz, Quantenmechanik - Eine kompakte Einführung (Teubner, 2005)
  - R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, Feynman Vorlesungen über Physik, Band 3, Quantenmechanik (Oldenburg, 2001)
  - W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 und 5/2 (Springer, 2002)
  - F. Schwabl, Quantenmechanik (Springer 1993)
  - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Quantenmechanik 1 und 2 (de Gruyter 1999)
- **Tutorien:**
  - Dienstag 8:15 - 10:00 Uhr im P-N 229 (Jan Schlesner)
  - Mittwoch 10:15 - 12:00 Uhr im P-N 246 (Janis Nötzel)
  - Mittwoch 14:15 - 16:00 Uhr im P-N 226 (Janis Nötzel)
  - Donnerstag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 114 (Jens Förstner)
  - Freitag 12:15 - 14:00 Uhr im P-N 226 (Philipp Zedler)
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur
- **Sprechstunden:**
  - Prof. Dr. A. Knorr Di, 13 - 14 Uhr im P-N 742
  - Jan Schlesner Do, 13:30-14:30 Uhr im P-N 627
  - Philipp Zedler Mi, 11-12 Uhr im P-N 711
  - Janis Nötzel Fr, 14-15 Uhr im MA 723
  - Jens Förstner Mi, 15-16 Uhr im P-N 152
- **Klausur:** Mittwoch, 7. Februar 2007, 12:00 - 14:00. Raum wird noch bekannt gegeben.
- **Mathematica-Kurs:** http://www.physik.tu-berlin.de/pcpool/kurse/mathematica/