Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary, Dipl-Phys.Frank Elsholz, Dipl.-Phys. Ermin Malic www.itp.tu-berlin.de/2578.html

11. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IV

Reduzierte Dichtematrix, Ratengleichung

Abgabe: Montag 22. Jan 2006 bis 13.00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 26 (4 Punkte): *Reduzierte Dichtematrix*

Ein Spin $1/2$ (System A) sei an ein Wärmebad (System B) mit N Zuständen gekoppelt. Das Gesamtsystem (A+B) befinde sich im normierten Zustand

$$|\Psi\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes (\alpha_1|1\rangle + ... + \alpha_N|N\rangle) + |\downarrow\rangle \otimes (\beta_1|1\rangle + ... + \beta_N|N\rangle)\,. \tag{1}$$

1) Drücken Sie die reduzierte Dichtematrix ρ_A für das System A mittels der komplexen Koeffizienten-Vektoren $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ aus.
2) Berechnen Sie die Koeffizienten-Quadrate λ_n^2 in der Schmidt-Zerlegung des Zustands, $|\Psi\rangle = \sum_n \lambda_n |c_n^{(A)}\rangle \otimes |c_n^{(B)}\rangle$, und überprüfen Sie explizit, dass ρ_A eine Dichtematrix ist.
3) Diskutieren Sie für reelle $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ mit $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ die Abhängigkeit der von-Neumann-Entropie für ρ_A vom Winkel zwischen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$. Wann ist $|\Psi\rangle$ verschränkt?

Aufgabe 27 (3 Punkte): *Tripartite Schmidt decomposition*

A generalised Schmidt decomposition for an arbitrary wavefunction of three particles would read

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i |\phi_i^{(1)}\rangle|\phi_i^{(2)}\rangle|\phi_i^{(3)}\rangle, \quad a_i \geq 0, \tag{2}$$

where $|\phi_i^{(1)}\rangle$ is a basis in the first, $|\phi_i^{(2)}\rangle$ a basis of the second, and $|\phi_i^{(3)}\rangle$ a basis of the third Hilbert space. We assume that all three subsystems have the same dimension d.

1) Show that ($d = 2$), the three-qubit state

$$|\psi\rangle = 3^{-1}\left(|001\rangle + i\sqrt{2}|110\rangle + i\sqrt{2}|011\rangle - 2|100\rangle\right) \tag{3}$$

can indeed be written in this form, but that the so-called W-state

$$|W\rangle = 3^{-1/2}\left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\right) \tag{4}$$

can not.

2) The above example demonstrates that decomposition (2) does not exist for a general tri-partite wavefunction. Explain (for general dimension d) why this is the case by comparing the number of (real) parameters required to describe an arbitrary tripartite wavefunction with the number of (real) parameters in three local unitary transformations that can be used to bring this wavefunction into the form of Eq. (2).

Aufgabe 28 (3 Punkte): *Raten-Gleichung für Kernzerfall*

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit eines Kerns sei w.

1) Stellen Sie die Ratengleichung für $p(n,t)$ auf, wobei $p(n,t)$ die Wahrscheinlichkeit, nach einer Zeit t noch n nichtzerfallene Kerne zu haben, ist. Nehmen Sie dabei an, dass die Zerfallsprozesse unabhängig voneinander sind.

2) Berechnen Sie aus der Ratengleichung für $p(n,t)$ den Mittelwert $\langle n\rangle(t)$ der Anzahl nichtzerfallener Kerne nach einer Zeit t.

3) Lösen Sie die Differentialgleichung für die erzeugende Funktion $F(z,t) = \sum_n z^n p(n,t)$ und bestimmen Sie damit $p(n,t)$ (Anfangsbedingung $p(n,t_0) = \delta_{n,n_0}$).