23. November 2006

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary, Dipl-Phys.Frank Elsholz, Dipl.-Phys. Ermin Malic www.itp.tu-berlin.de/2578.html

7. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IV

Rényi-Information, Paramagnetic Solid, Rotator

Abgabe: Montag 4 Dez. 2006 bis 13.00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 15 (3 Punkte): *Rényi-Information*

Die Rényi-Information einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p_n, $n = 1, ..., N$, ist ein folgendermaßen definiertes Informationsmaß:

$$I_q(\{p_n\}) = \frac{1}{q-1} \ln \left(\sum_{n=1}^{N} p_n^q \right) \tag{1}$$

Zeigen Sie, daß

$$\lim_{q \to 1_+} I_q(\{p_n\}) = I(\{p_n\}) = \sum_{n=1}^{N} p_n \ln p_n \tag{2}$$

die Shannon-Information liefert.

Für kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ ist die Rényi-Information durch

$$I_q(\rho) = \frac{1}{q-1} \ln \left(\int dx \rho^q(x) \right) \tag{3}$$

gegeben. Berechnen Sie diesen Ausdruck im Fall einer Gauß-Verteilung

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2 \right], \tag{4}$$

und vergleichen Sie mit der Shannon-Information.

Aufgabe 16 (4 Punkte): *Paramagnetic solid*

(a) Using Boltzmann's law, $S = k_B \ln \Omega$, and Stirling's approximation, $\ln m! \approx m \ln m - m$, for $m \gg 1$, show that the entropy of a paramagnetic solid comprising a lattice of N independent spin-$\frac{1}{2}$ atoms is given by

$$S = k_B \left[N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n) \right] \tag{5}$$

when the number of up-spins in the z-direction is n and, hence, the number of down-spins in the z direction is $(N-n)$.

(b) If the paramagnetic solid is now placed in a magnetic field B in the z-direction, and the spins have a magnetic dipole moment μ, show that the internal energy is $E = (N-2n)\mu B$.

(c) Use the statistical mechanical definition of temperature and the following the simple relation among the relevant partial derivatives in this case,

$$(\partial S/\partial E)_{B,N} = (\partial n/\partial E)_{B,N} (\partial S/\partial n)_N, \tag{6}$$

to show that the internal energy is given in terms of the temperature by

$$E = -N\mu B \tanh(\mu B/k_B T). \tag{7}$$

[Hint: First find T as a function of n, $T = T(n)$, and then invert the relation to get $n = n(T)$.]

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 17 (4 Punkte): *Rotator*

The diatomic molecules of a certain gas (each with moment of inertia I) have rotational energy levels given by

$$E_l = (\hbar^2/2I)l(l+1); \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

with degeneracy $g_l = (2l+1)$.

Show that the one-particle rotational partition function, Z_1, is given by

$$Z_1(T) = 1 + 3\exp(-\hbar^2/Ik_BT) \tag{9}$$

in the low-temperature limit ($T \ll \hbar^2/k_BI$), and by

$$Z_1(T) = 2Ik_BT/\hbar^2 \tag{10}$$

in the high-temperature limit ($T \gg \hbar^2/k_BI$).
[Hint: Replace sums with integrals where justified]

- **Internetseite der Veranstaltung:** http://www.itp.tu-berlin.de/2580.html
- **Vorlesung:** Dienstags 10 bis 12 und Donnerstags 8 bis 10 , P-N 203
- **Tutorien:**
  - Di. 12-13 P-N 229 Dr. Clive Emary
  - Mi. 10-12 P-N 184 Dipl.-Phys. Ermin Malic
  - Fr. 8-10 P-N 226 Dr. Frank Elsholz
- **Literatur (siehe Skript):**
  A. Sommerfeld, R. Becker, W. Nolting, N. Straumann, H. B. Callen, F. Reif, L. Reichl, L. D. Landau, H.E. Stanley, Huang, Stumpf
- **Scheinkriterien:** 50% der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien und bestandene Klausur.
- **Sprechstunden:**
  Prof. Dr. T. Brandes: Mo, 13 - 14 Uhr PN 744
  Dr. Clive Emary: Do, 16 - 17 Uhr PN 705
  Dr. Frank Elsholz: Di, 13 - 14 Uhr PN 629
  Dipl.-Phys. Ermin Malic: Mi. 12 - 13 Uhr im P-N 152
- **Klausur:** 8. Februar 2007.