Zusammenfassung der 1. Vorlesung (22.10.07)

1. Klassische Information und Quanteninformation

1.1 *Darstellung* : Klassische Information wird durch eine Zeichenreihe der Länge N, $x_1x_2x_3\ldots x_N$, mit Zeichen aus einem Alphabet $x_i \in \mathcal{A}$, $\#\mathcal{A} = M$, dargestellt. Entsprechende Quanteninformation wird durch eine Wellefunktion $\Psi \in (\mathbf{C}^M)^{\otimes N} \cong \mathbf{C}^{MN}$ dargestellt. Während die klassische Information (man denke an eine Zeitung unbekannten Inhalts) stets zweifelsfrei erkannt werden kann, ist die durch Ψ dargestellte Quanteninformation (man denke an eine Ionenfalle, die auf ein bestimmtes Ψ präpariert wurde, das dem "Leser" aber unbekannt ist) prinzipiell unerkennbar. Nach Auszeichnung einer Orthonormalbasis $\{|x>\}_{x\in\mathcal{A}}$ im $\mathbf{C}^M$, wird der klassischen Information $x_1x_2x_3\ldots x_N$ die Wellenfunktion

$$|x_1x_2x_3\ldots x_N> := |x_1> \otimes |x_2> \otimes |x_3> \otimes \ldots \otimes |x_N>$$

des $(\mathbf{C}^M)^{\otimes N}$ zugeordnet. Diese Wellenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des $(\mathbf{C}^M)^{\otimes N}$. Sie können als Eigenfunktionen einer Observablen A aufgefasst werden, die die klassische Information im $(\mathbf{C}^M)^{\otimes N}$ darstellt. Im Allgemeinen, d.h. wenn Ψ keine dieser Eigenfunktionen ist, wird durch Messung von A die Zeichenreihe $x_1x_2x_3\ldots x_N$ mit der von 0 und 1 verschiedenen Wahrscheinlichkeit

$$p(x_1x_2x_3\ldots x_N) = |<x_1x_2x_3\ldots x_N|\Psi>|^2$$

erhalten. Zufälligkeiten treten aber nicht nur bei der Quanteninformation auf, in der klassischen Informationstheorie werden sie z. B. durch undeutliche, verwischte Zeichen oder fehlerhafte Übertragung verursacht.

1.2 *Klassische Wahrscheinlichkeit, Quantentheorie, Blochsphäre und Blochkugel* : Eine grundlegende gemeinsame Struktur aller statistischen Theorien wird durch das Mischungsaxiom ausgedrückt. Zustände einer statistischen Theorie werden operational durch Präparierverfahren definiert, die es erlauben, Gesamtheiten gleichpräparierten physikalischer Systeme zu erzeugen, mit denen Versuchsreihen durchgeführt werden können. Evidenter Weise lassen sich Gesamtheiten auch dadurch erzeugen, dass verschiedene Präparierverfahren zufällig, aber mit definiertem Verhältnis der Häufigkeiten bei der Präparation im einzelnen Fall, zum Einsatz kommen. Die Menge der Zustände trägt damit eine konvexe Struktur. Die Menge der Zustände lässt sich stets als konvexxe Punktmenge eines reellen affinen Raumes, etwa im $\mathbf{R}^n$ darstellen. Sind etwa P und Q Darsteller zweier Präparierverfahren und O ein beliebig ausgezeichneter Ursprung des Raumes, dann sind auch alle Punkte R, die durch

$$\vec{OR} = \lambda \vec{OP} + (1-\lambda)\vec{OQ}, \quad \lambda \in [0,1]$$

bestimmt sind, Darsteller von Präparierverfahren. Die Wahrscheinlichkeiten und mithin die Erwartungswerte des durch R dargestellten Präparierverfahrens sind dabei, weil Wahrscheinlichkeiten durch Grenzwerte relativer Häufigkeiten definiert sind, im selben Verhältnis gemischt wie die Präparierverfahren:

$$p_R = \lambda p_Q + (1-\lambda)p_P,$$

wobei p_X, $X = P, Q, R$, die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Messwert einer Observablen bei Anwendung des Präparierverfahrens X ist. Eine Punktmenge des $\mathbf{R}^n$ heißt konvex, wenn mit zwei beliebigen Punkten P, Q dieser Menge auch der oben definierte Punkt R zu dieser Menge gehört. Die Zustände einer statistischen Theorie sind stets durch eine solche Menge darstellbar. Funktionale auf einer konvexen Menge, die die oben für p_X ausgedrückte Eigenschaft haben, heißen affin. Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte sind stets affine Funktionale auf den Zuständen. Eine besondere Rolle spielen dabei die Extremalpunkte einer konvexen Menge. Eine konvexe Menge ist stets die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte. Physikalich bilden die Extremalpunkte die reinen Zustände, klassisch z.B. die zweifelsfrei erkennbare Reihe deutlicher Zeichen, quantenmechanisch, wie wir noch zeigen werden, die durch eine Wellenfunktion darstellbaren Zustände.