Revidierte Zusammenfassung der 13. Vorlesung (28.01.08)

*(Die ursprüngliche Fassung enthält einen **fatalen Schreibfehler** in der Formulierung des Liebschen Theorems: **Anstelle von** $f(A,B) := tr(AX^t BX^{(1-t)})$ **muss** $f(A,B) := tr(X^+ A^t X B^{(1-t)})$ **stehen!**)*

Zum Beweis des Satzes von Plenio und Vedral war noch zu zeigen, dass

$$S'_{\sigma_0}(\sigma) = \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty (\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}(\sigma_0 - \sigma)\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}})dt\Psi > \geq 0$$

mit $\sigma = |\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|$ für beliebige $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_2$, $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ gilt. Der Integrand des ersten Terms von $S'_{\sigma_0}(\sigma)$ ist

$$\frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + t\mathbf{1})^2} = \sum_\nu \frac{c_\nu^2}{c_{(\nu}^2 + t)^2}|\varphi_\nu \otimes \psi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{c_\nu^2}{c_{(\nu}^2 + t)^2}dt &= \frac{1}{c_\nu^2}\int_0^\infty \frac{1}{c_{(\nu}^2 + \frac{t}{c_\nu^2})^2}dt \\ = \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx &= -\int_0^\infty (\frac{1}{(1+x)})'dx = 1, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty \frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + t\mathbf{1})^2}dt\Psi > \\ = \quad & \frac{1}{\ln 2}\sum_\nu | < \Psi|\varphi_\nu \otimes \psi_\nu > |^2 = \frac{1}{\ln 2}\sum_\nu c_\nu^2 = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Der Subtrahend in $S'_{\sigma_0}(\sigma)$ ist nach Einsetzen der Schmidtdarstellung für Ψ

$$\frac{1}{\ln 2}\sum_{\mu\nu} c_\nu c_\mu < \varphi_\nu \otimes \psi_\nu| \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|\frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}}dt\varphi_\mu \otimes \psi_\mu >$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\sum_{\mu\nu}\int_0^\infty \frac{c_\nu}{c_\nu^2 + t}\frac{c_\mu}{c_\mu^2 + t}dt < \varphi_\nu \otimes \psi_\nu|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi|\varphi_\mu \otimes \psi_\mu > .$$

Nun istt

$$\int_0^\infty \frac{c_\nu}{c_\nu^2+t}\frac{c_\mu}{c_\mu^2+t}dt \leq \sqrt{\int_0^\infty \frac{c_\nu^2}{(c_\nu^2+t)^2}\int_0^\infty \frac{c_\mu^2}{(c_\mu^2+t)^2}dt} = 1,$$

so dass

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\ln 2} < \Psi, \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_0 + t\mathbf{1}} |\varphi\otimes\psi >< \varphi\otimes\psi| \frac{1}{\sigma_0+t\mathbf{1}} dt \Psi > \\
\leq\ & \frac{1}{\ln 2}\sum_\nu < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi > \sum_\mu < \varphi, \varphi_\mu >< \psi, \psi_\mu > \\
=\ & \frac{1}{\ln 2}\left|\sum_\nu < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi >\right|^2 \leq \frac{1}{\ln 2}\left(\sum_\nu | < \varphi_\nu, \varphi >< \psi_\nu, \psi > |\right)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{\ln 2}\left(\sqrt{\sum_\nu | < \varphi_\nu, \varphi > |^2}\sqrt{\sum_\nu | < \psi_\nu, \psi > |^2}\right)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{\ln 2}\|\varphi\|^2\|\psi\|^2 = \frac{1}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Damit ist $S'_{\sigma_0}(\sigma) \geq \frac{1}{\ln 2}(1-1) = 0$, was noch zu zeigen war.

Man zeigt leicht, dass das v. Neumannsche Verschränktheitsmaß die Forderungen (I) und (II) erfüllt: Die **Eigenschaft (I)** folgt unmittelbar aus der Kleinschen Ungleichung. Die **Eigenschaft (II)** ergibt sich daraus, dass für unitäre Transformationen U und Dichteoperatoren stets $U\log_2(\rho)U^+ = \log_2(U\rho U^+)$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}
S(U\rho U^+\|U\sigma U^+) &= \mathrm{tr}(U\rho U^+(\log_2 U\rho U^+ - \log_2 U\sigma U^+)) \\
&= \mathrm{tr}(U\rho U^+(U(\log_2\rho)U^+ - U(\log_2\sigma)U^+)) = S(\rho\|\sigma)
\end{aligned}$$

durch zyklisches Tauschen unter der Spur. Sei nun $E_{v.N.}(\rho) = S(\rho\|\sigma_0)$, d.h. $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ und $S(\rho\|\sigma_0)$ ist der minimaler Wert für $\sigma \in \mathcal{D}$. Dann ist mit $U = U_1\otimes U_2$ auch $(U_1\otimes U_2)\sigma(U_1\otimes U_2)^+ \in \mathcal{D}$ und wegen $S(U\rho U^+\|U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)$ ist $S(U\rho U^+\|U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)_0$ ebenfalls minimal für $\sigma \in \mathcal{D}$. Also ist $E_{v.N.}(U\rho U^+) = S(U\rho U^+\|U\sigma U^+) = S(\rho\|\sigma)_0$ und damit $E_{v.N.}(U\rho U^+) = E_{v.N.}(\rho)$.

Um zu zeigen, dass das v. Neumannsche Verschränktheitsmaß auch die Forderung (III) erfüllt, benötigen wir weitere Eigenschaften der relativen

Entropie. Zunächst ist zu bemerken, dass die relative Entropie $S(\rho\|\sigma)$ in ρ konvex ist. Wegen der Konkavität der v. Neumann Entropie und der Linearität der Spur gilt für $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{array}{rl} & S(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2\|\sigma) \\ = & -S(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2) - \operatorname{tr}((\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2)\log_2 \sigma) \\ \geq & -\alpha S(\rho_1) - (1-\alpha)S(\rho_2) - \alpha\operatorname{tr}((\rho_1 \log_2 \sigma) - (1-\alpha)\operatorname{tr}(\rho_2 \log_2 \sigma) \\ = & \alpha S(\rho_1\|\sigma) + (1-\alpha)S(\rho_2\|\sigma). \end{array}$$

Eine weitere Eigenschaft folgt aus dem folgenden Satz.

Satz(Elliot Lieb): Seien X, A, und B selbstadjungierte Operatoren áuf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} < \infty$, und $X \geq 0$, $A \geq 0$ sowie $B \geq 0$. Mit $t \in [0,1]$ sei $f(A,B) := \operatorname{tr}(X^+ A^t X B^{(1-t)})$. Dann ist $f(A,B)$ in (A,B) kombiniert konkav, d.h. für $\alpha \in [0,1]$ gilt

$$\alpha f(A_1, B_1) + (1-\alpha) f(A_2, B_2) \leq f(\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2, \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst selbsadjungierte Operatoren $r_i \geq 0$,$S_i \geq 0$ und $T_i \geq 0$, $i = 1,2$, auf$\mathcal{H}$ für die $R_i > S_i + T_i$ und $[R_1, R_2] = [S_1, S_2] = [T_1, T_2] = 0$ gilt. Dann folgt für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{array}{rl} & | < \varphi, (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}})\psi > | \leq \|S_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|\|S_2^{\frac{1}{2}}\psi\| + \|T_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|\|T_2^{\frac{1}{2}}\psi\| \\ \leq & \sqrt{\|S_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 + \|T_1^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2}\sqrt{\|S_2^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|T_2^{\frac{1}{2}}\psi\|^2} \\ = & \sqrt{< \varphi, (S_1 + T_1)\varphi >}\sqrt{< \psi, (S_2 + T_2)\psi >} \\ \leq & \sqrt{< \varphi, R_1\varphi >}\sqrt{< \psi, R_2\psi >}. \end{array}$$

Sei nun E_1 der Täger von R_1 und E_2 der Träger von R_2, d.h. $(1-E_1)$, $i = 1,2$, ist jeweilig der maximale Projektionsoperator, für den $(1-E_i)R_i = R_i(1-E_i) = 0$ gilt. Weil $[R_1, R_2] = 0$ ist. folgt $[E_1, E_2] = 0$. Ist $(1 - E_1E_2)\varphi = \varphi$ oder $(1 - E_1E_2)\psi = \psi$, dann folgt aus der oben stehenden Ungleichung $< \varphi, (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}})\psi >= 0$. Deshalb muss der Träger von $(S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}})$ unter E_1E_2 liegen, also gilt

$$E_1E_2(S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}})E_1E_2 = (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}})$$

Da R_i auf $E_i\mathcal{H}$ bijektiv voperiert, gibt es Operatoren $\hat{R}_i$ mit $\hat{R}_i E_i R_i E_i = E_i$. Unter Missbrauch der Sprache nennen wir die eindeutigen Operatoren $E_i \hat{R}_i E_i =: R_i^{-1}$. Diese sind ebenfalls positiv. Sei nun V eine zunächst beliebige unitäre Transformation auf $\mathcal{H}$ und $\chi \in \mathcal{H}$ beliebig. Für $\varphi = R_1^{-\frac{1}{2}} V\chi$ und $\psi = R_2^{-\frac{1}{2}}\chi($ gilt dann

$$\begin{array}{rl} & | < \chi, V^+ R_1^{-\frac{1}{2}} (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}}) R_2^{-\frac{1}{2}} \chi > | \\ \leq & \sqrt{< \chi, V^+ E_1 V \chi >} \sqrt{< \chi, E_2 \chi >} \leq \|\chi\|^2. \end{array}$$

Sei nun

$$C := R_1^{-\frac{1}{2}} (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}}) R_2^{-\frac{1}{2}} = U\sqrt{C^+ C},$$

wobei rechts die Polardarstellung von C steht. Mit der Verfügung $V = U$ ergibt sich dann für beliebiges $\chi \in \mathcal{H}$

$$| < \chi, U^+ C \chi > | =< \chi, \sqrt{C^+ C} \chi >=< \chi, |C| \chi >\leq \|\chi\|^2.$$

Sei nun $B := R_2^{\frac{1}{4}} R_1^{-\frac{1}{4}}$ Aus $[R_1, R_2] = 0$ folgt $B = B^+ \geq 0$ und $B^{-1} = R_2^{-\frac{1}{4}} R_1^{\frac{1}{4}}$. Damit ist

$$B^{-1} C B = R_2^{-\frac{1}{4}} R_1^{-\frac{1}{4}} (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}}) R_1^{-\frac{1}{4}} R_2^{-\frac{1}{4}} \geq 0,$$

denn aus $[S_1, S_2] = 0$ folgt $S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} = S_1^{\frac{1}{4}} S_2^{\frac{1}{2}} S_1^{\frac{1}{4}} \geq 0$ und analog $T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Andererseits ist für beliebiges $\chi \in \mathcal{H}$

$$\begin{array}{rl} & 0 \leq < \chi, B^{-1} C B \chi > \leq \|\chi\| \|B^{-1} C B \chi > \leq \|\chi\| \leq \|B^{-1}\| \|C\| \|B\| \|\chi\| \\ \leq & \|C\| \|\chi\|^2 \leq \||C|\| \|\chi\|^2 \leq \sup\limits_{\pi \in \mathcal{H}} \dfrac{< \phi, |C| \phi >}{\|\phi\|^2} \|\chi\|^2 \leq \|\chi\|^2. \end{array}$$

Damit ist

$$0 \leq B^{-1} C B \leq 1$$

und also

$$E_1 E_2 (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}}) E_1 E_2 = (S_1^{\frac{1}{2}} S_2^{\frac{1}{2}} + T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{1}{2}}) \leq R_1^{\frac{1}{2}} R_2^{\frac{1}{2}}.$$

(Fortsetzung des Beweises folgt.)