Zusammenfassung der 15. Vorlesung (11.02.08)

Mit Hilfe der kombinierten Konvexität der relativen Entropie $S(\rho\|\sigma)$ in (ρ,σ) kann man für ideale Messoperationen erster Art den folgenden Satz beweisen. Im Blick auf die Kleinsche Ungleichung sagt dieser Satz aus, dass zwei Zustände einander "ähnlicher"' werden, wenn man sie der gleichen idealen Operation unterwirft.

Satz: Seien P_ν Orthogonalprojektoren, $P_\nu = P_\nu^+ = P_\nu^2$, die eine Zerlegung des Einsoperators bilden, $\sum_{\nu=1}^{M'} P_\nu = \mathbf{1}$, und $\mathcal{J} : \rho \mapsto \sum_{\nu=1}^{M'} P_\nu \rho P_\nu$ die zugehörige ideale Operation, dann gilt $S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) \leq S(\rho\|\sigma)$.

Beweis: Mit einem Orthogonalprojektor Q sei $U := 2Q - \mathbf{1}$, dann gilt $UU^+ = 4Q - 4Q + \mathbf{1} = \mathbf{1}$, d. h. U ist unitär. Überdies gilt, und das ist Entscheidend für die Ausnutzung der kombinierten Konvexität:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}U\rho U^+ &= \frac{1}{2}\rho + 2Q\rho Q - \rho Q - Q\rho + \frac{1}{2}\rho \\
&= Q\rho Q + Q\rho Q - \rho Q - Q\rho + \rho \\
&= Q\rho Q + (Q - \mathbf{1})\rho Q + (\mathbf{1} - Q)\rho \\
&= Q\rho Q + Q\rho Q - \rho Q - Q\rho + \rho \\
&= Q\rho Q - (\mathbf{1} - Q)\rho Q + (\mathbf{1} - Q)\rho \\
&= Q\rho Q + (\mathbf{1} - Q)\rho Q(\mathbf{1} - Q).
\end{aligned}$$

Sei nun für $(N = 1, 2, \ldots, M')$

$$Q_N := \sum_1^N P_\mu \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_N : \tau \mapsto Q_N \tau Q_N + (\mathbf{1} - Q_N)\rho Q(\mathbf{1} - Q_N),$$

dann gelten für $N \geq N'$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&Q_N Q_{N'} = Q_{N'}, \qquad && Q_N(\mathbf{1} - Q_{N'}) = Q_N - Q_{N'} = \sum_{\mu=N'+1}^{N} P_\mu, \\
&(\mathbf{1} - Q_N)Q_{N'} = 0 && (\mathbf{1} - Q_N)(\mathbf{1} - Q_{N'}) = (\mathbf{1} - Q_N)
\end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1\rho &= \mathcal{J}_2(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho Q(\mathbf{1}-P_1)) \\
&= Q_2(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho P_1(\mathbf{1}-P_1))Q_2 \\
&\quad +(\mathbf{1}-Q_2)(P_1\rho P_1 + (\mathbf{1}-P_1)\rho Q(\mathbf{1}-P_1)(\mathbf{1}-Q_2)) \\
&= P_1\rho P_1 + P_2\rho P_2 + 0 + (\mathbf{1}-Q_2)\rho(\mathbf{1}-Q_2).
\end{aligned}$$

Aus der Annahme, dass für $N < M'$

$$\mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho = \sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{N+1}\mathcal{J}_N\ldots\mathcal{J}_1\rho \\
= \quad & Q_{N+1}(\sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N))Q_{N+1} \\
& +(\mathbf{1}-Q_{N+1})(\sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + (\mathbf{1}-Q_N)\rho(\mathbf{1}-Q_N))(\mathbf{1}-Q_{N+1}) \\
= \quad & \sum_1^N P_\mu\rho P_\mu + P_{N+1}\rho P_{N+1} + 0 + (\mathbf{1}-Q_{N+1})\rho\mathbf{1}-Q_{N+1}).
\end{aligned}$$

Durch Induktion wird damit die Annahme bestätigt und wegen $Q_{M'} = \mathbf{1}$ gilt

$$\mathcal{J}\rho = \mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho.$$

Mit $U_N := 2Q_N - 1$, $\rho_N = \mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho$ und $\sigma_N = \mathcal{J}_N\mathcal{J}_{N-1}\ldots\mathcal{J}_1\sigma$ gilt

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) &= S(\mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho\|\mathcal{J}_{M'}\mathcal{J}_{M'-1}\ldots\mathcal{J}_1\rho) \\
&= S(\mathcal{J}_{M'}\rho_{M'-1}\|\mathcal{J}_{M'}\sigma_{M'-1}) \\
&= S(Q_{M'}\rho_{M'-1}Q_{M'} + (\mathbf{1}-Q_{M'}))\rho_{M'-1}(\mathbf{1}-Q_{M*})\| \\
&\qquad Q_{M'}\sigma_{M'-1}Q_{M'} + (\mathbf{1}-Q_{M'}))\sigma_{M'-1}(\mathbf{1}-Q_{M*})) \\
&= S(\frac{1}{2}\rho_{M'-1} + \frac{1}{2}U_{M'}\rho_{M'-1}U_{M'}^+\|\frac{1}{2}\sigma_{M'-1} + \frac{1}{2}U_{M'}\sigma_{M'-1}U_{M'}^+) \\
&\leq \frac{1}{2}S(\rho_{M'-1}\|\sigma_{M'-1}) * \frac{1}{2}S(\rho_{M'-1}\|\sigma_{M'-1}) = S(\rho_{M'-1}\|\sigma_{M'-1}) \\
&= S(\mathcal{J}_{M'-1}\rho_{M'-2}\|\mathcal{J}_{M'+1}\sigma_{M'-2}) \leq \ldots\ldots.. \\
&\leq S(\rho\|\sigma),
\end{aligned}$$

was behauptet worden war.

Nun lassen lokale Operationen $\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2$ auf bipartiten Systemen die Menge der unverschränkten Zustände $\mathcal{D}$ invariant, denn

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)|\varphi \otimes \psi >< \varphi \otimes \psi| &= (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)(|\varphi >< \varphi| \otimes |\psi >< \psi|) \\ &= (\mathcal{J}_1|\varphi >< \varphi|) \otimes (\mathcal{J}_2)|\psi >< \psi|).\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$E_{v.N.}((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho) \leq S((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho \| (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\sigma_0) \leq S(\rho\|\sigma_0) = E_{v.N.}(\rho),$$

wobei $\sigma_0 \in \mathcal{D}$ ein unverschränkter Zustand ist, für den $S(\rho\|\sigma_0)$ minimal ist. Damit ist gezeigt, dass lokale ideale Operationen die v.Neumann Verschänktheit nicht erhöhen können. Dies soll jedoch für alle lokalen Operationen gelten.

Dazu ist zu zeigen, dass aus

$$\mathcal{J}; \rho \mapsto \sum_{nu} A\rho A^+, \quad \text{wobei nur} \quad \sum_{nu} A^+ A = \mathbf{1} \quad \text{gefordert wird,}$$

ebenfalls $S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) \leq S(\rho\|\sigma)$ folgt. Mit Hilfe eines Satzes von Neumark über verallgemeinerte Spektralscharen kann diese Aussage leicht erhalten werden, wenn für ideale Operationen zweiter Art

$$\mathcal{J} : \rho \mapsto \sum_{\nu}^{M'} V_\nu P_\nu \rho P_\nu^+ V_\nu^+ \quad \text{mit} \quad P = P^+ = P^2 \quad \text{und} \quad V_\nu^+ V_\nu = \mathbf{1}$$

$S(\mathcal{J}\rho\|\mathcal{J}\sigma) \leq S(\rho\|\sigma)$ gezeigt ist, Der Versuch, die letztere Aussage auf die kombinierte Konvexität der relativen Entropie zurückzuführen, ist jedoch gescheitert: Der in der Vorlesung vorgettragene Beweis enthält eine Lücke, die nicht geschlosen werden konnte. Tatsächlich knüpft ein direkter Beweis der gewünschten Aussage von A. Uhlmann [Commun. Math. Phys. 54, 21-32 (1977)] an die in A konkave Funktion $\mathrm{tr}(X^+ A^t X A^{1-t} - XX^+ A)$ an, mit deren Hilfe wir die kombinierte Konvexität erschlossen haben. Eine an unsere Darstellung angepasste Formulierung dieses Beweises soll in einem Nachtrag zu dieser Zusammenfassung gegeben werden.