Zusammenfassung der 5. Vorlesung (19.11.07)

1.3 *Korrelationen, Verschränktheit, Quantenkorrelationen bipartiter Systeme*: Nach Wiederholung der Grundbegriffe der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie wie Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega.\mathcal{A}, \mu)$ und der Interpretation, insbesondere der Deutung von $\mathcal{A}$ als Logik der Ereignisse, Versuchsreihen und Selektion nach dem Auftreten eines bestimmten Ereignisses, wurde für $\mu(b) \neq 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von a unter der Hypothese b,

$$\mu(a|b) := \frac{\mu(a \cap b)}{\mu(b)},$$

eingeführt. Offenbar gelten stets die Bayes'schen Identitäten

$$\mu(a \cap b) = \mu(b)\mu(a|b) = \mu(a)\mu(b|a),$$

sowie

$$\mu(a) = \mu(b)\mu(a|b) + \mu(b^c)\mu(a|b^c),$$

wobei b^c die Komplementärmenge von b bezeichnet. Im Allgemeinen gilt $\mu(a|b) \neq \mu(a)$. Falls jedoch $\mu(a|b) = \mu(a)$, und folglich auch $\mu(a \cap b) = \mu(a)\mu(b)$ sowie $\mu(b|a) = \mu(b)$ gelten, dann heißen die Ereignisse a und b voneinander unabhängig.

Seien nun $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ die Messräume der Teile eines bipartiten Systems, dann ist das Produkt $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$, wobei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ die von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ erzeugte σ-Algebra ist, der natürliche Messraum für das zusammengesetzte System. Sind μ und μ' Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bzw. $(\Omega', \mathcal{A}')$, dann gilt für das durch $(a, a') \mapsto \mu(a)\mu'(b')$ eindeutig bestimmte Produkmaß π auf $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$

$$\pi((a, \Omega') \cap (\Omega, b')) = \pi((a, b')) = \pi((a, \Omega'))\pi((\Omega, b')),$$

d.h. die Ereignisse (a, Ω') und (Ω, b') treten unabhängig voneinander auf. Da dies für alle Paare (a, b') gilt, nennt man das Maß π auch unkorreliert.

Im Allgemeinen gibt es für ein Maß κ auf $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$ jedoch Ereignisse (a, b') mit

$$\kappa((a, \Omega')|(\Omega, b')) \neq \kappa((a, \Omega')) \quad \text{und} \quad \kappa((\Omega, b')|(a, \Omega')) \neq \kappa((\Omega, b')),$$

d. h. es treten Korrelationen auf.
Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}) \tilde{=} (\Omega', \mathcal{A}')$ mit $a \leftrightarrow a'$, $b \leftrightarrow b'$ und für alle (a, b') gelte $\kappa(a, b') = \kappa((a \cap b), (a' \cap b'))$, dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa((a, \Omega')|(\Omega, a')) &= \frac{\kappa((a, a'))}{\kappa((\Omega, a'))} = \frac{\kappa((a, a'))}{\kappa((a, a'))} = \frac{\kappa((a, a'))}{\kappa((a, \Omega'))} \\ &= \kappa((\Omega, a'))|(a, \Omega')) = 1. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind alle korrespondierenden Ereignisse der beiden Teilsysteme strikt korreliert. Ein solches Maß κ läßt sich leicht konstruieren.
In der Quantenmechanik sei $\mathcal{H}$ der zugrunde liegende Hilbertraum. Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, dann betrachtet man anstelle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ ein Spektralmaß

$$M : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{H}) := \{P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) | P = P^+ = P^2\}$$

mit den Eigenschaften:

$$M(\Omega) = \mathbf{1}, \quad M(a^c) = \mathbf{1} - M(a),$$

und für jede endliche oder abzählbar unendliche Folge paarweise disjunkter Ereignisse $\{a_n\}$ gilt

$$M(\bigcup_n a_n) = \sum_n M(a_n).$$

Jede messbare Funktion $f \to \mathbf{R}$ bestimmt dann durch

$$F := \int_\Omega f dM = \int_{\mathbf{R}} x d(M \circ f^{-1})$$

eine Observable $F = F^+$. Das letzte Integral über $\mathbf{R}$ stellt die in der Quantenmechanik übliche Form der Spektralzerlegung dar, in der die Spektralschar etwa durch $E_x = M \circ f^{-1}((-\infty, x])$ gegeben ist. Man zeigt leicht, dass das Bild von $\mathcal{A}$ unter M aus vertauschbaren Projektionsoperatoren besteht und, dass mit einem Dichteoperator ρ durch $\mu(\cdot) := \mathrm{tr}(\rho M(\cdot))$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.