Zusammenfassung der 6. Vorlesung (26.11.07)

1.3 *Korrelationen, Verschränktheit, Quantenkorrelationen bipartiter Systeme (Fortsetzung)*: Der Hilbertraum eines bipartiten Quantensystems, das aus zwei Teilsystemen mit Hilberäumen $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ besteht, ist das Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Für Observablen $A = A^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ ist $A \otimes \mathbf{1}$ die Observable des Gesamtsystems, die zu Messungen am ersten Teilsystem gehört und für $B = B^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ ist $\mathbf{1} \otimes B$ die Observable des Gesamtsystems, die zu Messungen am zweiten Teilsystem gehört. Observablen, die zu Messungen an verschiedenen Teilsyystemen gehören, sind daher stets kommensurabel (kompatibel), es gilt für den Kommutator $[A \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes B] = 0$. Ist $\{\varphi_i\}$, $< \varphi_i, \varphi_k >= \delta_{ik}$, eine vollständige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$ und $\{\psi_l\}$, $< \psi_l, \psi_m >= \delta_{lm}$, eine vollständige Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$, dann ist $\varphi_i \otimes \psi_l$, $< \varphi_i \otimes \psi_l, \varphi_k \otimes \psi_m >=< \varphi_i, \varphi_k >< \psi_l, \psi_m >= \delta_{ik}\delta_{lm}$ eine vollständige Orthonormalbasis von $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Für Spurklasseoperatoren R, T ist $R \otimes T$ Spurklasseoperator und es gilt $\mathrm{tr}(R \otimes T) = \mathrm{tr}(R)\mathrm{tr}(T)$.

Definition: Ein Dichteoperator $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ heißt *faktorisierend*, falls

$$(\exists(\sigma, \sigma') \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{D}(\mathcal{H}_2)) \quad \rho = \sigma \otimes \sigma'.$$

ρ heißt *unverschränkt*, falls

$$(\exists(\sigma_\nu, \sigma'_\nu) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1) \times \mathcal{D}(\mathcal{H}_2)) \quad \rho = \sum_\nu \lambda_\nu \sigma_\nu \otimes \sigma'_\nu, \quad \lambda_\nu \geq 0, \sum_\nu \lambda_\nu = 1.$$

Andernfalls heißt ρ *verschränkt.*

Betrachte nun Observablen der Teilsysteme, die etwa durch Spektralmaße $\mathbf{M}_1$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1$ und $\mathbf{M}_2$ auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2$ gegeben seien. Ist $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ faktorisierend, dann gilt für alle Paare $(a_1, b_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

$$\mathrm{tr}((\mathbf{M}_1(a_1) \otimes \mathbf{M}_1(b_2))\rho) = \mathrm{tr}((\mathbf{M}_1(a_1)\sigma_1)\mathrm{tr}((\mathbf{M}_2(b_2)\sigma_2),$$

d.h. alle Paare solcher Ereignisse sind unabhängig. Die Ergebnisse von Messungen an den Teilsystemen sind in faktorisierenden Zuständen des Gesamtsystems stets unkorreliert. Ist ρ unverschränkt, dann treten Korrelationen auf. Speziell sind für $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \cong (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, $\mathcal{A}_1 \ni a_1 \leftrightarrow a_2 \in \mathcal{A}_2$ und Ω diskret, etwa $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$, die Observablen der Teilsysteme

$$A = \sum_i^N i|\varphi_i >< \varphi_i| \quad \text{und} \quad B = \sum_i^N i|\psi_i >< \psi_i|,$$

wobei $N = \dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$ sei, in den Zuständen

$$\rho = \sum_i^N \lambda_i |\varphi_i >< \varphi_i| \otimes |\psi_i >< \psi_i|, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

strikt korreliert. Es gilt füt $a, b \subseteq \mathbf{N}$ mit

$$\mu((a, b)) = \mathrm{tr}(((\sum_{i \in a} |\varphi_i >< \varphi_i|) \otimes (\sum_{i \in b} |\psi_i >< \psi_i|))\rho)$$

$\mu((\{i\}, \mathbf{N})|(\mathbf{N}, \{j\})) = \delta_{ij}$.

Zur Betrachtung der verschränkten Zutaände benötigen wir noch ein Hilfsmittel, die partielle Spur. Durch $A \mapsto \mathrm{tr}((A \otimes \mathbf{1})\rho)$ definiert $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ einen Zustand $\rho_1 = \mathrm{tr}_2(\rho) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ auf $\mathcal{H}_1$, der die partielle Spur von ρ über $\mathcal{H}_2$ genannt wird. Analog wird auch die partielle Spur $\mathrm{tr}_1\rho$ definiert, die ein Dichteoperator auf $\mathcal{H}_2$ ist. Mit vollständigen Orthomormalsystemen $\{\varphi_i\}$ in $\mathcal{H}_1$ und $\{\psi_l\}$ in $\mathcal{H}_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \mathrm{tr}_2\rho &= \sum_{i,j,k} |\varphi_i >< \varphi_i \otimes \psi_k, \rho(\varphi_j \otimes \psi_k) >< \varphi_j| \\ \rho_2 = \mathrm{tr}_1\rho &= \sum_{i,j,k} |\psi_i >< \varphi_k \otimes \psi_i, \rho(\varphi_k \otimes \psi_j) >< \psi_j|. \end{aligned}$$

Ein Einheitsvektor Ψ in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ kann mit einer vollständigen Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}$ von $\mathcal{H}_1$ stets in der Form $\Psi = \sum_i \varphi_i \otimes \chi_i$ geschrieben werden, wobei χ_i bestimmte Vektoren von $\mathcal{H}_2$ sind. Wählt man jedoch $\{\varphi_i\}$ als Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\mathrm{tr}_2(|\Psi >< \Psi|)$, d.h.

$$\mathrm{tr}_2(|\Psi >< \Psi|) = \sum_i p_i |\varphi_i >< \varphi_i|,$$

dann folgt $<\chi_i, \chi_k>= p_i \delta_{ik}$ und mit $c_i := +\sqrt{p_i}$ und $\psi_i := c_i^{-1} \chi_i$ ist

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i \otimes \psi_i,$$

wobei die c_i positiv und eindeutig bestimmt sind. O.B.d.A, kann $c_i \geq c_{i+1}$ angenommen werden. Diese Darstellung von Ψ heißt die *Schmidtdarstellung* und die Koeffizienten heißen *Schmidtkoeffizienten*. In symmetrischer Weise gilt dann auch

$$\mathrm{tr}_1(|\Psi >< \Psi|) = \sum_i p_i |\psi_i >< \psi_i|.$$