Zusammenfassung der 7. Vorlesung (03.12.07)

1.3 *Korrelationen, Verschränktheit, Quantenkorrelationen bipartiter Systeme (Fortsetzung)* 1.3.1 *Verschränktheit reiner bipartiter Zustände*:
Die Schmidtdarstellung liefert eine vollständige Beschreibung der Verschränktheitseigenschaften reiner bipartiter Zustände. Man kann zunächst drei Klassen unterschiedlicher Qualität unterscheiden. Dazu ist es vorteilhaft, die Korrespondenz der (vollständigen) Orthonormalbasen eines Hilbertraums der Dimension $M \leq \infty$, $\{\varphi_i\}_{0,1,2,\ldots,(M-1)}$, mit den Spektralmaßen $\mathbf{M}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, (M-1)\}$ und $\mathcal{A}$ die Potenzmenge von Omega ist,

$$\mathcal{A} \ni a \longmapsto \mathbf{M}(a) = \sum_{j \in a} |\chi_j >< \chi_j|$$

zu betrachten. Diese Spektralmaße haben die Eigenschaft, dass das Bild $M(\mathcal{A})$ ein maximaler Boolescher, d.h. distributiver, Unterverband des Verbandes aller Projektionsoperatoren ist. Im Sinne der Aufgabe 8 (3. Übungsblatt) ist deshalb $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ eine maximale Menge von Projektionsoperatoren, für die Wahrheitswertfunktionale als Boolesche Homomorphismen des zugehörigen Booleschen Ringes auf $\{0, 1\}, +, \cdot)$ definiert werden können. Dies ist im weiteren Sinne eine notwendige Voraussetzung dafür, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{tr}(\mathbf{M}(\cdot)\rho)$ mit der Auswertung von Versuchsreihen verknüpft werden kann.

Betrachte nun die Schmidt Darstellung eines reinen bipartiten Zustandes Ψ in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wobei etwa $M_1 := \dim \mathcal{H}_1 \leq M_2 := \dim \mathcal{H}_2$, $M_1 < \infty$ sei:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i \varphi_i \otimes \psi_i \quad , \quad c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{M_1-1} \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i^2 = 1.$$

Um die Sprechweise für nachfolgende Überlegungen zu vereinfachen, nehmen wir o.B.d.A, an, dass die φ_i und ψ_k Orthonormalbhasen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ sind, von denen nur die Elemente mit $c_i \neq 0$ in die Schmidtdarstellung eingehen.
1. Fall: $c_1 = 0$. Dann ist Ψ faktorisierend. Dies ist der einzige Fall eines unverschränkten reinen Zustandes.

2. Fall: $c_1 \neq 0$ und die von Null verschiedenen Schmidtkoeffizienten sind paarweise ungleich. Dann sind auch die in der Schmidtdarstellung auftretenden ($c_i \neq 0$) Wellenfunktionen φ_i und ψ_i eindeutig und es gilt mit

$$\mathcal{A}_1 \ni a \mapsto \mathbf{M}_1(a) = \sum_{j \in a} |\varphi_j >< \varphi_j| \quad , \quad \mathcal{A}_2 \ni b \mapsto \mathbf{M_2}(b) = \sum_{j \in b} |\psi_j >< \psi_j|,$$

wobei $\mathcal{A}_\nu$, $\nu = 1, 2$, die Potenzmengen von $\{0, 1, 2, \ldots, (M_\nu - 1)\}$ sind und mithin $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ gilt. Für $\mu((a, b)) := \mathrm{tr}((\mathbf{M}_1(a) \otimes \mathbf{M}_2(b))|\Psi >< \Psi|)$ und $c_i, c_j \neq 0$ folgt dann

$$\mu((\Omega, \{i\})|(\{j\}, \Omega)) = \mu((\{j\}, \Omega)|(\Omega, \{i\})) = \delta_{ij}.$$

Überdies gilt mit $b := \{k\}_{c_k \neq 0} \in \mathcal{A}_1$ stets $\mu((b, \Omega)) = \mu((\Omega, b)) = 1$. Alle Ereignisse aus $\mathcal{A}_1$, die mit endlicher Wahrscheinlichkeit am ersten Teilsystem auftreten, sind mit den entsprechenden Ereignissen aus $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ am zweiten Teilsystem strikt korreliert. In dem betrachteten Fall sind dies alle in diesem Sinne strikt korrelierten Ereignispaare, weil die in der Schmidtdarstellung auftretenden ($c_i \neq 0$) Wellenfunktionen φ_i und ψ_i für $c_i \neq 0$ eindeutig bestimmt sind.

3. Fall: $c_1 \neq 0$, aber unter den Schmidtkoeffizienten treten Gleichheiten auf. Für $c_i = c_{i+1}$ liegen die Wellenfunktionen $\varphi_i \otimes \psi_i$ und $\varphi_{i+1} \otimes \psi_{i+1}$ nicht mehr fest, und das führt dazu, dass die Mächtigkeit der Menge der Paare strikt korrelierter Ereignisse schlagartig anwächst. Um uns dies klar zu machen, betrachten wir gleich den optimalen Fall gleicher Schmidtkoeffizienten $c_i = (1/\sqrt{M_1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, (M - 1)$. Dann ist die Orthonormalbasis $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2,\ldots,(M-1)}$ von $\mathcal{H}_1$ nicht mehr durch Ψ festgelegt: Sei $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=0,1,2,\ldots,(M-1)}$ eine beliebige andere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$, dann gilt $\varphi_i = \sum_j |\tilde{\varphi}_j >< \tilde{\varphi}_j, \varphi_i >$ und es pst $\sum_i < \tilde{\varphi}_j, \varphi_i > \overline{< \tilde{\varphi}_k, \varphi_i >} = \delta_{jk}$. Sei nun $\tilde{\psi}_k := \sum_l |\psi_l >< \tilde{\varphi}_k|\varphi_l >$, dann gilt $\psi_i = \sum_k |\tilde{\psi}_k > \overline{< \tilde{\varphi}_k, \varphi_i >}$, und damit

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i \varphi_i \otimes \psi_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i,j,k} (|\tilde{\varphi}_j >< \tilde{\varphi}_j, \varphi_i >) \otimes (|\tilde{\psi}_k > \overline{< \tilde{\varphi}_k, \varphi_i >}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_j \tilde{\varphi}_j \otimes \tilde{\psi}_j. \end{aligned}$$

Die unter dem 2. Fall durchgeführte Herleitung strikter Korrelationen für $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ kann nun ebenso für

$$\mathcal{A}_1 \ni a \mapsto \tilde{\mathbf{M}}_1(a) = \sum_{j \in a} |\tilde{\varphi}_j >< \tilde{\varphi}_j| \quad , \quad \mathcal{A}_2 \ni b \mapsto \tilde{\mathbf{M}}_\mathbf{2}(b) = \sum_{j \in b} |\tilde{\psi}_j >< \tilde{\psi}_j|$$

gemacht werden und liefert weitere Paare strikt korrelierter Eigenschaften der Teilsysteme. Die Orthonormalbasis $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=0,1,2,...,(M-1)}$ von $\mathcal{H}_1$ kann beliebig gewählt werden, d.h. zu jeder Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$ gibt es genau eine Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_2$ so dass die entsprechenden strikten Korrelationen gelten. Man folgert leicht, dass dies in der Sprache der Quantenlogik so ausgerückt werden kann: Für jede Proposition $P = P^+ = P^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, d.h. dür jede Observable mit dem Pektrum $\{0, 1\}$ des ersten Teilsystems, gibt es genau eine solche $Q = Q^+ = Q^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ des zweiten Teilsystems, so dass im Zustand Ψ die Ereignisse $(1, \{0, 1)\}$ und $(\{0, 1\}, 1)$ strikt korreliert sind. Ein solcher Zustand Ψ heißt maximal verschränkt.

Die reinen bipartiten Zustände Ψ und $(U \otimes V)\Psi$, wobei U und V unitäre Operatoren sind, haben offenbar die gleichen Schmidtkoeffizienten, die den Grad der Verschränktkeit bestimmen. Der Grad der Verschränktheit reiner bipartiter Zustände wird mit

$$E(\Psi) := -\sum_{j=o}^{M_1-1} c_j^2 \log_2 c_j^2 \quad , \quad E(\Psi) \in [0, \log_2 M_1]$$

gemessen. $E(\cdot)$ wird auch das Verschränktheitsmaß der partiellen Spur genannt, weil $E(\Psi)$ die v. Neumann Entropie von $\mathrm{tr}_1|\Psi >< \Psi|$ ist, die mit $\mathrm{tr}_2|\Psi >< \Psi|$ übereinstimmt. Man verifiziert leicht, dass $E(\Psi)$ unter lokalen unitären Trasformationen $(U \otimes V)$ invariant ist, d.h. $E(\Psi) = E((U \otimes V)\Psi)$ gilt. $E(\Psi) = 0$ gilt genau dann, wenn Ψ faktorisierend ist, und $E(\Psi) = \log_2 M_1$ gilt genau dann, wenn die Schmisdtkoeffizienten alle gleich $(1/\sqrt{M_1})$ sind.

Der Fall $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 =: M$ ist insofern erwähnenswert, weil dann $\Psi = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i \varphi_i \otimes \psi_i$ eine Bijektion $\mathbf{B}$ der Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ auf diejenigen von $\mathcal{H}_2$, wobei $\mathbf{B}(\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=0,1,2,...,(M-1)}) = \{\tilde{\psi}_i\}_{i=0,1,2,...,(M-1)}$ mit $\tilde{\psi}_k := \sum_l |\psi_l >< \tilde{\varphi}_k|\varphi_l >$ ist, bestimmt wird. Damit ist eine Bijektion aller Propositionen des ersten Teilsystems auf alle Propositionen des zweitten Teilsystems so besimmt, dass die durch die Bijektion verknüpften Paare im Zustand Ψ strikt korreliete Werte haben.

Als paradox wird für bipartite Systeme die folgende Situation angesehen: Bei Idealmessung erster Art der Observablen

$$\mathbf{A} = \sum_{i.j} (i, j)|\tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_j >< \tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_j|$$

im Zustand Ψ mit dem Ergebnis i, j, das als Dezimalbruch zu lesen ist, ist mit der Operation

$$\Psi \quad \longmapsto \quad \Psi' = \frac{|\tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_j >< \tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_j|\Psi}{| < \tilde{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_j|\Psi > |^2}$$

verknüpft, die den Zustand nach der Messung liefert. Speziell treten für $\Psi = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j$ nur die Werte i, i auf, und ist k, k der gemessene Wert, dann ist nach den oben gemachten Überlegungen $\Psi' = \tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\psi}_k$.. Diesen Zustand Ψ' erhält man aber auch, wenn man lediglich am ersten Teilsytem die Observable $A = \sum_j j|\tilde{\varphi}_j >< \tilde{\varphi}_j|$, d.h. $A \otimes \mathbf{1}$ misst und das Ergebnis k erhält, denn

$$\frac{(|\tilde{\varphi}_k >< \tilde{\varphi}_k| \otimes \mathbf{1})\Psi}{\mathrm{tr}((|\tilde{\varphi}_i >< \tilde{\varphi}_i| \otimes \mathbf{1})|\Psi >< \Psi|)} = \Psi'.$$

Hierbei wird durch die Messung nur auf das erste Teilsystem eingewirkt. Das zweite Teilsystem, das sich im raumartigen Abstand s vom ersten Teilsystem befinden mag, muss aufgrund des relativistischen Kausalitätsprinzips mindestens die Zeit $t = (s/c)$ nach der Messung unbeeinflusst bleiben. Überdies kann das System der Eigenvektoren , $\tilde{\varphi}_j$, das die Observable A bestimmt, beliebig gewählt werden und in jedem Fall erhält man durch Messung am ersten System aufgrund der bestehenden strikten Korrelationen die entsprechende Information über das zweite Teilsystem, obwohl wechelseitiger Wirkungsauseinfluss zwischen den Teilchen ausgeschlossen ist. Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen ersannen auf dieser Grundlage ein Argument dafür, dass die Quantenmechanik die Natur nicht vollständig beschreiben könne. Es begann eine Suche nach verborgenen Parametern, die die seltsamen Quantenkorrelationen auf klassische Korrelationen zurückführen sollten. John Bell leitete Ungleichungen her, die bei der Existenz verborgener Parameter erfüllt sein müssen. Erstmalig wurde von Alain Aspect (1982) experimentell bewiesen, dass die Quantenmechanik diese Ungleichungen verletzt. Seither werden die Quantenkorrelationen als nichtlokale Phänomene angesehen.

Mit Teleportation bezeichnet man Verfahren, die es ermöglichen, einen unbekannten Quantenzustand von einem Quantensystem auf ein anderes zu übertragen. Dazu ist die Realisierung eines bipartiten maximal verschränkten Zustandes, lokale Operationen wie Messung einer Observablen sowie Umpräparierung eines Zustandes, und die Möglichkeit klassischer Kommunikation (LOCC) nötig.