

1. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II**Abgabe: Di 28.10.2008**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gravitomagnetismus

Im letzten Jahr wurde ein Experiment abgeschlossen, dass bestimmte Effekte des Gravitationsfeldes auf Gyroskope (Kreisel) bestimmen sollte. Dieses Experiment trägt den schlichten Namen Gravity Probe B. Es treten dabei zwei verschiedene Effekte auf, die es theoretisch zu beschreiben gilt.

- a) Betrachten Sie zunächst die Bewegung eines Gyroskops in einem gegebenen kugelsymmetrischen statischen Gravitationsfeld. Dem (Eigen-) Drehimpuls des Gyroskops sei der Vektor s^μ zugeordnet. Er folgt der Bewegungsgleichung

$$(1) \quad \frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\kappa\nu}^\mu s^\kappa u^\nu.$$

Das Gravitationsfeld sei beschrieben durch die Schwarzschildmetrik

$$(2) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)$$

Das Gyroskop befinde sich auf einer Kreisbahn mit $r = \text{const}$, $\Theta = \pi/2$ und $\phi = \omega_0\tau$ mit $u^0 = \text{const}$ und $\omega_0 = \text{const}$. Seine Vierergeschwindigkeit ist dann $(u^\mu) = (u^0, 0, 0, \omega_0)$.

- i) Bestimmen Sie mittels (1) die Bewegungsgleichungen für s^μ im Gravitationsfeld (2) unter den benutzten Einschränkungen. (Die Christoffelsymbole für die Schwarzschildmetrik hatten wir schon mal bestimmt, bzw. man kann schnell den Computer benutzen.)
 - ii) Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen unter den Anfangsbedingungen $s^1(0) = 1$, $s^2(0) = 0$ und $s^3(0) = 0$.
Hinweise: Beachten Sie, dass die Christoffelsymbole als Konstante anzusehen sind. Die Integration von $s^2(\tau)$ ist trivial. Die Bewegungsgleichung für $s^1(\tau)$ kann integriert werden durch, nochmaliges ableiten nach τ und Ausnutzung der Gleichung für $s^0(\tau)$. Man erhält $\frac{d^2s^1}{d\tau^2} = -k^2s^1$ hier ist k^2 eine geschickt gewählte Konstante die noch zu bestimmen ist. (Es ist nicht notwendig die Gleichung für s^0 zu integrieren).
 - iii) Bestimmen Sie k^2 explizit. Benutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für u^1 - $\frac{du^1}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^1 u^\mu u^\nu$.
 - iv) Betrachten Sie die Eigenzeitspanne $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ für einen Umlauf. Befindet sich $s^i(\tau_0)$ wieder am Punkt $s^i(0)$?
- b) Neben dem statischen Gravitationsfeld haben die meisten Himmelskörper noch die Eigenschaft der Rotation. Diese wirkt sich auch auf das äußere Gravitationsfeld aus. Wir wollen diesem Effekt in einer Schwachfeldnäherung Rechnung tragen. Betrachten Sie dazu wiederum die Bewegung eines Kreisels gemäß (1). Für einen ruhenden Kreisel $(s^\mu) = (0, s^i)$, $(u^\mu) = (c, 0, 0, 0)$ mit $\tau = t$ ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$(3) \quad \frac{ds^i}{dt} = -c\Gamma_{j0}^i s^j,$$

wobei die Christoffelsymbole in linearer Näherung aus den Potentialen

$$(4) \quad h_{0i} = \frac{2GI}{c^3} \frac{\epsilon_{ikn} \omega^k x^n}{r^3}$$

zu bilden sind. Hier sind G, c die üblichen Konstanten, I das (konstante) Trägheitsmoment ϵ_{ikn} der totalantisymmetrische Tensor und es gilt $v_i = \epsilon_{ikn} \omega^k x^n$. Dabei ist ω^i die konstante Winkelgeschwindigkeit.

Leiten Sie aus (3) die Bewegungsgleichung

$$(5) \quad \frac{ds_i}{dt} = \pm \frac{GI}{c^2} \left(\frac{3}{r^5} (r^j \omega_j) (\mathbf{s} \times \mathbf{r})_i - \frac{1}{r^3} (\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega})_i \right)$$

ab.

Hängt dieser Effekt von der Bahn um die rotierende Quelle ab?

Hinweis: Benutzen Sie die bac-cab Regel.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	<ul style="list-style-type: none"> • Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte.
Sprechzeiten:	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. H.-H. v. Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740 • Dipl.-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
https://www.itp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2
erfolgen.