Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
Dr. N. Bücking

11. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 05.02.08 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): ***Kanonischer Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie***

(i) Leiten Sie aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(R^{(3)} + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2)$ und der zweiten Fundamentalform $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha}N_{\beta)})$ die kanonischen Impulse $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}} = \sqrt{\gamma}\,(K_{\alpha\beta} - Kh_{\alpha\beta})$ ab.

Beachten Sie, dass N, γ und $R^{(3)}$ nicht Funktion von $K_{\alpha\beta}$ sind. Weiterhin ist es enorm hilfreich anstatt $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}}$ den Ausdruck $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{\delta\gamma}}\frac{\partial K_{\delta\gamma}}{\partial\dot{h}_{\alpha\beta}}$ zu berechnen.

(ii) Bestimmen Sie damit die Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \pi_{\alpha\beta}\dot{h}^{\alpha\beta} - \mathcal{L}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): ***Hamiltonsche Formulierung der ART - Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten***

Betrachten Sie die Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

und die gewählte Eichung $N = 1$ und $N^j = 0$. Damit ergibt sich

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma} = S^3\sqrt{^{(3)}g} \tag{2}$$

worin $^{(3)}g = det^{(3)}g_{ij}$ die Determinate der Metrik eines Raumes konstanter Krümmung bezeichnet. Der Krümmungsskalar R ergibt sich dann zu

$$R = 6\left(\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{k}{S^2}\right). \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Lagrangedichte für diese Raumzeiten.
Man kann zeigen, dass der 3-Krümmungsskalar für Räume mit konstanter Krümmung k die Gestalt $^{(3)}R = -6kS^{-2}$ hat. Benutztten Sie dies um im Ergebnis aus a) den Krümmungsparameter k zu eliminieren.
b) Bestimmen Sie die zweite Fundamentalform K_{ij} für die betrachtete Eichung, welche zu

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{(3)}g_{ij}}{\partial t} - 2D_{(i}N_{j)}\right) \tag{4}$$

führt, wobei D_i die kovariante Ableitung bzgl. der 3-Raummetrik bezeichnet.
c) Berechnen Sie die Spur der zweiten Fundamentalform, und bestimmen Sie die kanonisch konjugierten Impulse

$$\pi_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}(K_{\alpha\beta} - Kh_{\alpha\beta}) \tag{5}$$

und deren Spur $\pi = \pi^{\alpha}{}_{\alpha}$ und kontravariante Darstellung $\pi^{\alpha\beta}$.
d) Bestimmen Sie die hamiltonsche Dichte der betrachteten Raumzeitmodelle.