

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 18.12.07 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Raychaudhuri-Gleichung*

Betrachten Sie einen allgemeinen Energie-Impuls-Tensor der Form

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2u_{(a} q_{b)} + \pi_{ab}, \quad (1)$$

mit den Eigenschaften $u^a q_a = 0, \pi^a_a = 0, \pi_{ab} u^a = 0$, wobei u^a ein zeitartiges Vektorfeld, μ die Energiedichte, p den Druck, q^a den Wärmestrom, π_{ab} den anisotropen Druck und $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ den Projektionstensor auf den zu u^a orthogonalen Unterraum bezeichnen. Es gelte weiterhin $u_a u^a = -1$. Die Feldgleichungen lauten $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}$.

a) Leiten Sie für ein zeitartiges Vektorfeld u_a aus der Ricci-Identität

$$u_{a;c;d} - u_{a;d;c} = R_{abcd} u^b \quad (2)$$

durch Überschieben mit \mathbf{u} und Kontraktion über das verbleibende Indexpaar die Propagationsgleichung für die Expansion (Raychaudhuri-Gleichung):

$$\dot{\Theta} = 2(\omega^2 - \sigma^2) + (\dot{u}^a)_{;a} - \frac{1}{3} \Theta^2 - \frac{1}{2} \kappa (\mu + 3p) \quad (3)$$

ab (Bezeichnungen laut Übung). Diskutieren Sie die auftretenden Terme im Hinblick auf deren Wirkung auf die zeitliche Änderung der Expansion $\dot{\Theta}$.

b) Die Raychaudhuri-Gleichung besitzt nicht nur für die Kosmologie sondern auch für andere allgemein-relativistische Probleme eine große Bedeutung. Betrachten Sie einen vereinfachtes sphärisches statisches Sternmodell (Welche kinematischen Größen verschwinden? Warum?). Leiten Sie die dafür geltende Raychaudhuri-Gleichung ab.

c) Bestimmen Sie für eine ideale Flüssigkeit die Abhängigkeit zwischen der Beschleunigung und den verbleibenden Größen in der Raychaudhuri-Gleichung, sowie die Zeitabhängigkeit der Energiedichte für das sphärisch-statische Sternmodell aus der Energie-Impuls-Bilanz. Diskutieren Sie die auftretenden Gleichungen im Vergleich zu den Newtonschen

$$\dot{u}_a = -\frac{p_{;a}}{\rho} \quad (4)$$

$$(\dot{u}^a)_{;a} = \frac{1}{2} \rho \quad (5)$$

im Hinblick auf die allgemein-relativistischen Besonderheiten, (hier bezeichnen ρ die Massendichte und p den Druck).

d) Betrachten Sie die Metrik der Robertson-Walker Raumzeiten (der Parameter $\epsilon = 0, \pm 1$ gibt die räumliche Krümmung an)

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (6)$$

und bestimmen Sie die Raychaudhuri-Gleichung für diesen Fall explizit. Vergleichen Sie diese mit den gewöhnlichen Friedmann Gleichungen.