Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
Dr. N. Bücking

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 22.01.08 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Hintergrundstrahlung*

Es kann gezeigt werden, dass eine für jeden Beobachter isotrope kosmische Hintergrundstrahlung die Existenz eines konformen Killingvektorfeldes ξ_α bedingt, welches parallel zum zeitartigen Vektorfeld u_α der Materie ist. Die Eigenschaft eines konformen Killingvektorfeldes ist definiert als

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = \phi g_{\alpha\beta},$$

Hierin bezeichnet ϕ den konformen Faktor.

Zeigen Sie, dass die derart charakterisierten Raumzeiten scherungsfrei sind, d.h. der Tensor

$$\sigma_{\alpha\beta} := h_\alpha{}^\delta h_\beta{}^\gamma \left(u_{(\delta;\gamma)} - \frac{1}{3}\Theta h_{\delta\gamma} \right)$$

verschwindet identisch. Hierin bezeichnen $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ den Projektor auf die zu u^α orthogonalen Hyperflächen und $\Theta = u^\alpha{}_{;\alpha}$ die Expansion.

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Beobachtungsrelation*

Man kann allgemein zeigen, dass die scheinbare Helligkeit m mit der absoluten Helligkeit M folgenden Zusammenhang zeigt

$$m = M - 2.5\log(D^{-2}(1+z)^{-4}). \tag{1}$$

Hierin sind D der Abstand und z die Rotverschiebung. Für diese gilt näherungsweise die Rotverschiebungs-Abstands-Relation

$$z = \frac{H}{c}D + \frac{(1+q)H^2}{2c^2}D^2. \tag{2}$$

Dabei sind $H = \frac{c\dot{R}(t)}{R(t)}$ die Hubble-Konstante und $q = \frac{-\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}(t)^2}$ der Abbremsungsparameter.

Leiten Sie die Helligkeits-Rotverschiebungs-Relation ($m-z$-Relation) für den Robertson-Walker-Kosmos bis einschließlich der ersten Ordnung in z ab. Hierzu sind folgende Schritte sinnvoll:

a) Bestimmen Sie die zu $z(D)$ inverse Funktion $D(z)$. (Beispielsweise zu finden im Bronstein unter dem Thema: analytische Funktionen, Taylorreihe, Entwicklung elementarer Funktionen in Potenzreihen.)

b) Entwickeln Sie dann die Logarithmusfunktion an der Stelle $z = 0$.

Alles zusammen ergibt dann die gesuchte $m-z$-Relation.