

## Zusatz-Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

**Abgabe: Dienstag 12.02.08** vor der Übung

### **Aufgabe 1 (10 Zusatz- Punkte): *Abelsche Chern-Simons Theorie und Zwangsbedingungen***

Um sich die Eigenarten einiger Feldtheorien anzuschauen benutzt man gerne niedrigdimensionale Vereinfachungen. Ein beliebtes Modell ist die 3-dimensionale abelsche Chern-Simons Theorie (also zwei Raum- und eine Zeitdimension) die durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} A^a \epsilon_{abc} F^{cb} + A^a J_a \quad (1)$$

gegeben ist, wobei  $\kappa$  eine Kopplungskonstante,  $\epsilon_{abc}$  der 3-dimensionale total antisymmetrische Tensor und  $A^a$  ein Vektorpotential ist. Dieses Vektorpotential definiert auch den Feldstärketensor  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  und koppelt an den äußeren Strom  $J^a$ , welcher der Kontinuitätsgleichung  $\partial^a J_a = 0$  gehorchen soll.

a) Bestimmen Sie aus der Lagrangedichte (1) die Impulsfunktionen  $\Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial A^k}{\partial t})}$  explizit. Was fällt an  $\Pi_0$  auf? Was fällt an  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  auf? Geben Sie den drei Bedingungen einen Namen - am besten  $\phi_m$ .

b) Bestimmen Sie den Integralausdruck für die Hamilton-Funktion  $H = \int_{V_2} d^2 x \mathcal{H}$  für die Hamiltonsche-Dichte  $\mathcal{H} = \Pi_k \frac{\partial A^k}{\partial t} - \mathcal{L}$  des Chern-Simons Feldes. Ergänzen Sie die Hamiltonsche-Dichte  $\mathcal{H}$  zu einer Hamiltonschen-Dichte, welche den Bedingungen  $\phi_m$  gerecht wird, indem Sie diese durch Lagrange-Multiplikatoren  $u^m$  erweitern, d.h.  $\mathcal{H}_p = \mathcal{H} + u^m \phi_m$  bilden. Formulieren Sie nun die fundamentalen Poisson-Klammern der Feldfunktionen  $A^a$  und der Impulsfunktionen  $\Pi_b$ .

c) Bilden Sie nun die zeitliche Entwicklung der so konstruierten Hamiltonschen-Dichte  $\mathcal{H}_p$  mit den Bedingungen  $\phi_m$ , d.h. berechnen Sie  $\frac{\partial \phi_m}{\partial t} = \int_{V_2} d^2 y [\phi_m(x), \mathcal{H}_p(y)]$ . Setzen Sie **danach**  $\frac{\partial \phi_m}{\partial t}$  gleich Null. Was fällt wiederum auf? Was kann man vielleicht noch tun?